

Rekurrente Folgen über Abelschen Gruppen

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Gösta Poch
aus Berlin

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Rekurrente Folgen über Abelschen Gruppen

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von

Gösta Poch
aus Berlin

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg.

Tag der mündlichen Prüfung: 24.11.1976

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. H. Remmert
Erstberichterstatter:	Professor Dr. K. Jacobs
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. M. Keane



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung.	1
§ 1 Untersuchungen über die Konstanztheit von Abbildungen in der Algebra $\mathbb{C}^G$ im Falle ei- ner endlichen abelschen Gruppe G .	4
§ 2 Gleichverteilung in Blöcken über einer end- lichen abelschen Gruppe G und Blockarithmetik.	14
§ 3 Strikt transitive, rekurrente Folgen in $G^{\mathbb{N}}$.	19
§ 4 Strikt ergodische Teilmengen im Shiftraum $G^{\mathbb{Z}}$.	42
Literaturverzeichnis.	47

EINLEITUNG

Seit ihrer Entdeckung durch Axel Thue [18] und ihrer Wiederentdeckung durch Marston Morse [15] hat die Folge 0110100110010110... aufgrund ihrer Nichtperiodizitäts-, Fastperiodizitäts- und Mittelwert-Eigenschaften das Interesse zahlreicher Mathematiker gefunden. Von Morse und Hedlund [5] stammt die Entdeckung, daß in jener Folge kein Block von Symbolen 0 und 1 sich wiederholt und dann zu einer weiteren Wiederholung ansetzt, und von Gottschalk-Hedlund die Charakterisierung der Morse-Folge durch eben diese starke Aperiodizitäts-Eigenschaft. Kakutani [10] und Keane [12] führten Symbolfolgen, die nach Prinzipien gebaut sind, die die Thue-Morse'schen verallgemeinern, in die Ergodentheorie ein, bewiesen ihre strikte Ergodizität und untersuchten Spektraleigenschaften des zugehörigen invarianten Maßes.

In der vorliegenden Arbeit gehen wir von einer endlichen abelschen Gruppe als Symbolvorrat aus und konstruieren mit einem gemischt gruppentheoretisch-kombinatorischen Verfahren eine Klasse von Symbolfolgen. Die Keane'schen Folgen ergeben sich für den Spezialfall der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_2$. Wir beweisen eine Verallgemeinerung des Morse-Hedlund'schen Aperiodizitätssatzes. Anschließend untersuchen wir die konstruierten Folgen auf Fastperiodizität und strikte Ergodizität. Eine einfache hinreichende Bedingung für strikte Ergodizität wird angegeben. Spektraltheoretische Untersuchungen bleiben außer Betracht.

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile.

In § 1 stellen wir einige relativ einfache Aussagen über endliche abelsche Gruppen und Gruppenringe, insbesondere über Charaktere zusammen. Wir beweisen, daß jede Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ von der endlichen abelschen Gruppe G in die Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$

genau dann konstant ist, wenn der Rang der Gruppenmatrix $M(f) = (f(a \cdot b^{-1}))_{a,b \in G}$ kleiner als die kleinste Primzahl ist, die die Gruppenordnung $(G, e) = n$ teilt.

In § 2 definieren wir für jedes Wort $w \in G^*$ aus der freien Halbgruppe G^* über G die relative Häufigkeit $\tilde{w} : G \longrightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ des Auftretens der Elemente aus G in w . Die Gruppenmatrix $M(\tilde{w})$ ist dann eine doppelstochastische Matrix und $1 - |\text{DET}(M(\tilde{w}))| \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ein "Maß für die Gleichverteilung" der Gruppenelemente aus G in dem Wort $w \in G^*$. Bei vorgegebenem surjektiven Gruppenhomomorphismus $h : G \longrightarrow G'$ nimmt die "Gleichverteilung" in $w \in G^*$ höchstens ab, wenn man von den Elementen $g \in G$, die in w vorkommen zu ihren Bild-elementen $h(g)$ übergeht. Wir definieren mittels der Gruppenstruktur $(G, \circ)$ auf G^* eine weitere Halbgruppenstruktur $(G^*, \times)$. Wir beweisen, daß die Abbildung $M \sim : G^* \longrightarrow \mathbb{Q}^{n^2}$ multiplikativ ist.

In § 3 definieren wir mit Hilfe der assoziativen Operation $\times : G^* \times G^* \longrightarrow G^*$ für bestimmte Blockfolgen $A \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ durch Fortsetzung rekurrente Folgen $A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$. Wir beweisen, daß die Menge $U(A) \subset G$ aller Elemente aus G , die in allen rekurrenten Folgen $A_i \times A_{i+1} \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ $i = 1, 2, \dots$ vorkommen, eine Untergruppe von G ist. Wir beweisen, daß die rekurrente Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ genau dann strikt transitiv ist, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\sum_{a \in U(A)} \tilde{A}_i(a) \chi(a)|)$ für alle nicht-trivialen Charaktere $\chi : U(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ divergiert. Wir zeigen, daß alle rekurrenten Folgen $A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ mit endlicher Menge $\{A_1, A_2, \dots\}$ strikt transitiv sind. Anschließend verallgemeinern wir den Satz von Hedlund-Morse [5] für die Morse-Folge $\omega = (01) \times (01) \times \dots \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ auf rekurrente Folgen $\omega = D \times D \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$: Kommt es zu einem Ansatz einer mehr als $|D|$ -fachen Wiederholung eines

Blockes aus G^* in ω , so hat der Block D einen "zyklischen Aufbau" $D = e h \dots h^{m-1}$ für ein $h \in G$ mit $h^{m-1} = e$.

In § 4 konstruieren wir im Shift-Raum $(G^{\mathbb{Z}}, T)$ nach einem ähnlichen Prinzip wie in $G^{\mathbb{N}}$ zur Blockfolge $A \in (G^*)^{\mathbb{Z}}$ die rekurrente Folge $\omega = (A_{-1} e A_1) \times (A_{-2} e A_2) \times \dots \in G^{\mathbb{Z}}$ durch Fortsetzung nach beiden Seiten. Es ergibt sich, daß die Bahnhülle $B(\omega) \subset G^{\mathbb{Z}}$ eines rekurrenten Punktes $\omega \in G^{\mathbb{Z}}$ genau dann strikt ergodisch ist, wenn die Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left| \sum_{a \in U(A)} A_{-i} e A_i(a) \chi(a) \right| \right)$$
 für alle nicht-trivialen Charaktere $\chi : U(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ divergiert. Es besitzt dann außerdem der Hilbertraum $L^2(\mu_\omega)$ bzgl. des T -invarianten Maßes μ_ω auf $B(\omega)$ eine besonders einfache direkte Zerlegung.

Ich bin durch den Artikel "Maschinenerzeugte 0-1-Folgen" in der Selecta Mathematica I von K. Jacobs [6] zu der Arbeit angeregt worden.

Es gibt keine Überschneidung mit den Arbeiten von Jacobs-Keane [9], Eberlein [3] und Coven-Keane [2].

Ich danke Herrn Professor Jacobs herzlich für wichtige Hinweise und Anregungen.

§ 1 Untersuchungen über die Konstanzheit von Abbildungen in der Algebra $\mathbb{C}^G$ im Falle einer endlichen abelschen Gruppe G .

Wir betrachten die freie Halbgruppe G^* der Worte über einem Alphabet G . Es sei außerdem im folgenden $G = \{g_0, \dots, g_{n-1}\}$ eine endliche abelsche Gruppe mit dem Einselement $g_0 = e$ und $(G : e) = n$ die Ordnung der Gruppe G . Wir wollen untersuchen, wie die Elemente aus G in einem beliebigen Wort aus G^* verteilt sind. Die relative Häufigkeit der Gruppenelemente aus G in einem Wort $w \in G^*$ kann man als eine Abbildung $\tilde{w} : G \longrightarrow [0, 1]$ auffassen mit $\sum_{g \in G} \tilde{w}(g) = 1$.

$\tilde{w}$ ist ein Element aus dem n -dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}^G$. Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Raum $\mathbb{C}^G$ und treffen folgende Definitionen.

Definition 1

Durch $f \times h (g) = \sum_{\substack{v, w \in G \\ v \circ w = g}} f(v) \cdot h(w) \quad \forall f, h \in \mathbb{C}^G \quad \text{und} \quad v, g \in G$

wird $\mathbb{C}^G$ zu einer Algebra über $\mathbb{C}$.

S. Lang [14] Chapter V

Definition 2

$M : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}, \quad \text{DET} (M) : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}$

seien die Abbildungen mit $M(f) = (f(g_i \circ g_j^{-1}))_{i, j = 0, \dots, n-1}$

und $\text{DET} (M) (f) = \text{DET} (M(f)) \quad \forall f \in \mathbb{C}^G$

Satz 1

a) $M : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ ist ein Algebra-Homomorphismus.

b) $M(f) \circ M(h) = M(h) \circ M(f) \quad \forall f, h \in \mathbb{C}^G$

c) $\text{DET} (M) : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}$ ist multiplikativ.

d) Für jedes $f \in \mathbb{C}^G$ sind $\text{Rang } M(f)$ und $|\text{DET} (M(f))|$ unabhängig von der Anordnung $g_0, \dots, g_{n-1}$ der Gruppenelemente von G .

Beweis:

Seien $f, h \in \mathbb{C}^G$

$$\begin{aligned} \text{a) } M(f \times h)_{(i,j)} &= (f \times h)(g_i \circ g_j^{-1}) = \sum_{\substack{v, w \in G \\ v \circ w = g_i \circ g_j^{-1}}} f(v) \cdot h(w) \\ &= \sum_{w \in G} f(g_i \circ g_j^{-1} \circ w^{-1}) \cdot h(w) \\ &= \sum_{w \in G} f(g_i \circ (g_j \circ w)^{-1}) \cdot h((g_j \circ w) \circ g_j^{-1}) \\ &= \sum_{v \in G} f(g_i \circ v^{-1}) \cdot h(v \circ g_j^{-1}) = (M(f) \circ M(h))_{(i,j)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich $M(f \times h) = M(f) \circ M(h)$

$$\text{b) } M(f) \circ M(h) = M(f \times h) = M(h \times f) = M(h) \circ M(f)$$

c) Aus a) folgt nach dem Determinanten-Produktsatz

$$\text{DET}(M(f \times h)) = \text{DET}(M(f)) \cdot \text{DET}(M(h))$$

d) Der Rang der Matrix $M(f)$ und der Absolutbetrag der Determinante $\text{DET}(M(f))$ sind unabhängig von der speziellen Anordnung der Gruppenelemente $g_0, \dots, g_{n-1}$, da eine andere Anordnung nur eine Vertauschung von Zeilen und von Spalten der Matrix $M(f)$ bewirkt.

Nach S. Lang [14] Chapter XIII Exercise 14 erhalten wir für jede Abbildung $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Diagonalisierung der Matrix $M(f)$ auf folgende Weise:

Definition 3

Für zwei Basen $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, $B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$ von $\mathbb{C}^G$ und einen Endomorphismus $T: \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G$ sei $M_B^A(T) = (c_{i,j})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathbb{C}^{n^2}$

die zu T gehörige Matrix bzgl. der Basistransformation von A nach B .

$$\text{d.h.: } T(a_i) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} b_j \quad i = 0, \dots, n-1$$

Als Basen von $\mathbb{C}^G$ wählen wir nun die zu G isomorphe Gruppe

$\overline{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$ der Charaktere von G nach $\mathbb{C}$ und die Menge

$\widehat{G} = \{1_0, \dots, 1_{n-1}\}$ der charakteristischen Funktionen von G nach $\{0,1\}$

wobei $1_i(g_j) = \delta_{i,j}$ für $i, j = 0, \dots, n-1$ und $\chi_0 = 1$ der triviale Charakter ist.

Lemma 1

Für jedes $f \in \mathbb{C}^G$ gelten folgende Aussagen :

a) $M(f)$

$$= M_{\widehat{G}} (1_G) \circ \text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right) \circ M_{\widehat{G}} (1_G)^{-1}$$

Dabei hängt die nicht-singuläre Matrix $M_{\widehat{G}} (1_G)$ nicht von f ab.

$$\text{b) } \text{Rang } M(f) = \left| \left\{ \chi \mid \chi \in \overline{G}, \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) \neq 0 \right\} \right|$$

$$\text{c) } \text{DET } (M(f)) = \prod_{\chi \in \overline{G}} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$$

Beweis:

a) Wir wählen den Endomorphismus $T : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G$

$$\text{mit } T(h)(g_i) = \sum_{g \in G} f(g) \cdot h(g_i \circ g) \text{ für alle } h \in \mathbb{C}^G, i = 0, \dots, n-1$$

und erhalten nach S. Lang [14] Chapter XIII für die Matrix $M_{\widehat{G}}(T)$

$$\text{folgende Diagonalisierung: } M_{\widehat{G}}(T) = M_{\widehat{G}}(1_G) \circ M_{\widehat{G}}(T) \circ M_{\widehat{G}}(1_G)^{-1}$$

$$\text{mit } M_{\widehat{G}}(T) = M(f)$$

$$\text{und } M_{\widehat{G}}(T) = \text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right)$$

b) Aus a) folgt

$$\begin{aligned} \text{Rang } M(f) &= \text{Rang } \text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right) \\ &= \left| \left\{ \chi \mid \chi \in \overline{G}, \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) \neq 0 \right\} \right| \end{aligned}$$

c) Aus a) ergibt sich

$$\text{DET } (M(f)) = \text{DET} \left(\text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right) \right)$$

$$= \prod_{\chi \in \overline{G}} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$$

Wir führen nun die Diagonalisierung bei Matrizen $M(f)$ durch, bei denen die zugrunde gelegte Gruppe G eine endliche, zyklische Gruppe ist.

Satz 2

Es sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $(G : e) = n$ und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung.

Weiterhin definieren wir das Polynom $\bar{f}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^i) \cdot X^i \in \mathbb{C}[X]$

Es sei $\xi = \exp 2\pi i/n$ n -te primitive Einheitswurzel.

Wir wählen für die Gruppe G und die Gruppe $\bar{G}$ der Charaktere von G nach $\mathbb{C}$ folgende Anordnungen:

$$G = \{e, g, \dots, g^{n-1}\} \quad \bar{G} = \{1, \chi, \dots, \chi^{n-1}\}$$

Dabei ist $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ der Charakter mit $\chi(g) = \xi$

Dann gilt:

a) Die Matrix $M(f) = (f(g^{i-j}))_{i,j=0,\dots,n-1}$ läßt sich in folgender Weise diagonalisieren:

$$M(f) = M_{\bar{G}}^{\bar{G}}(1_G) \circ \text{DIAG}(\bar{f}(1), \bar{f}(\xi), \dots, \bar{f}(\xi^{n-1})) \circ M_{\bar{G}}^{\bar{G}}(1_G)^{-1}$$

b) $\text{Rang } M(f) = |\{i \mid i = 0, \dots, n-1, \bar{f}(\xi^i) \neq 0\}|$

$$\text{c) } \text{DET}(M(f)) = \prod_{i=0}^{n-1} \bar{f}(\xi^i)$$

Beweis:

a), b) und c) folgen aus Lemma 1 a), b), c) unter Berücksichtigung von

$$\sum_{l=0}^{n-1} f(g^l) \chi^i(g^l) = \sum_{l=0}^{n-1} f(g^l) (\chi(g)^i)^l = \bar{f}(\xi^i) \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

Bemerkung

Die Matrix $M(f) = (f(g^{i-j}))_{i,j=0,\dots,n-1}$ ist folgendermaßen

konstruiert. Jede Zeile mit Ausnahme der ersten erhält man, indem man alle Elemente der vorhergehenden Zeile zyklisch um eine Spalte nach rechts shiftet. Man spricht von einfachen zirkularen Matrizen.

Einen anderen Beweis für die Diagonalisierung von einfachen zirkularen Matrizen findet man in [1].

Um später Aussagen über die Gleichverteilung der Gruppenelemente aus G in einem Wort aus G^* machen zu können, suchen wir zuerst nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konstanz von Abbildungen $f : G \longrightarrow \mathbb{Q}$. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß G eine abelsche Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist.

Satz 3

Es sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe mit der Ordnung $(G : e) = p^r$, wobei p Primzahl und $r \in \mathbb{N}$

Es sei außerdem $f : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Abbildung mit $\sum_{g \in G} f(g) \neq 0$

f ist dann und nur dann konstant, wenn $\text{Rang } M(f) < p$ gilt.

Beweis:

Die eine Richtung ist trivial, denn aus $f = \text{const.}$ folgt $\text{Rang } M(f) = 1 < p$.

Sei umgekehrt $\text{Rang } M(f) < p$

Mit $n = p^r$, $\bar{f}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^i) X^i \in \mathbb{Q}[X]$, $\xi = \exp 2\pi i/n$

folgt nach Satz 2 b) $\text{Rang } M(f) = |\{i \mid i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ und } \bar{f}(\xi^i) \neq 0\}|$

Angenommen $\bar{f}(X)$ hätte keine p^i -te primitive Einheitswurzel als Nullstelle, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

Da es $(p-1) \cdot p^{i-1}$ primitive p^i -te Einheitswurzeln gibt und nach Voraussetzung $\bar{f}(X)$ an der Stelle 1 nicht verschwindet, würde folgen

$\text{Rang } M(f) \geq (p-1) p^{i-1} + 1$

Es würde sich ergeben $\text{Rang } M(f) \geq p$ Widerspruch!

Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ gibt es deshalb mindestens eine primitive p^i -te Einheitswurzel ξ_i mit $\bar{f}(\xi_i) = 0$

Das Minimalpolynom von ξ_i in $\mathbb{Q}[X]$ ist das Kreisteilungspolynom

$$\phi_{p^i}(X) = X^{(p-1) \cdot p^{i-1}} + X^{(p-2) \cdot p^{i-1}} + \dots + 1$$

Aus $\bar{f}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\bar{f}(\xi_i) = 0$ folgt deshalb $\phi_{p^i}(X) \mid \bar{f}(X)$

Da die irreduziblen p^i -ten Kreisteilungspolynome zueinander teilerfremd sind, folgt weiterhin $1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{i=1}^r \phi_{p^i}(X) \mid \bar{f}(X)$

Es folgt $\bar{f}(X) = \text{const.} \cdot (1 + X + \dots + X^{n-1})$

Somit gilt $f = \text{const.}$

Corollar 1

Es sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung $(G : e) = p$, p Primzahl und $f : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Abbildung mit $\sum_{g \in G} f(g) \neq 0$

$f = \text{const.}$ dann und nur dann, wenn $\text{DET } (M(f)) = 0$

Beweis:

$\text{DET } (M(f)) = 0$ ist äquivalent mit $\text{Rang } (M(f)) < p$

Deshalb folgt die Aussage aus Satz 3.

Mit Hilfe des Basissatzes geben wir nun eine Verallgemeinerung von Satz 3 auf beliebige endliche, abelsche Gruppen.

Satz 4

Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Abbildung von der endlichen, abelschen Gruppe G in den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, und $f(g) \geq 0$ für alle $g \in G$

$f = \text{const.}$ dann und nur dann, wenn $\text{Rang } M(f) < p$

für die kleinste Primzahl p , die die Gruppenordnung $(G : e)$ teilt.

Beweis:

Nach dem Basissatz kann man jede endliche abelsche Gruppe darstellen als direkte Summe zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnungen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl t dieser direkten Summanden von G .

Aus $f = \text{const.}$ folgt $\text{Rang } M(f) = 1 < p$

Wir brauchen deshalb nur die andere Richtung durch Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang: $t = 1$, G zyklisch, $(G : e) = p^r$, p Primzahl, $\text{Rang } M(f) < p$

1. Fall: $\sum_{g \in G} f(g) = 0$ Nach Voraussetzung ist $f \geq 0$. Deshalb folgt $f = 0$

2. Fall: $\sum_{g \in G} f(g) \neq 0$ Nach Satz 3 folgt dann aus $\text{Rang } M(f) < p$, daß die Abbildung f konstant ist.

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage "Aus $\text{Rang } M(f) < p$ folgt $f = \text{const.}$ " sei richtig für alle Gruppen G , die direkte Summe von t zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnungen sind.

Induktionsbehauptung:

Sei H direkte Summe von $t + 1$ zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnungen $H = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_{t+1}$, $\mathcal{U}_i$ zyklisch, $(\mathcal{U}_i : e) = p_i^{r_i}$, p_i

Primzahl für $i = 1, \dots, t + 1$

$f : H \longrightarrow \mathbb{Q}$ Abbildung, $f \geq 0$ und $\text{Rang } M(f) < \text{Min} \{p_1, \dots, p_{t+1}\}$

Dann folgt $f = \text{const.}$

Induktionsbeweis:

Sei $G = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_t$ Dann ist $H = G \oplus \mathcal{U}_{t+1}$

$G = \{g_0, \dots, g_{n-1}\}$, $\mathcal{U}_{t+1} = \{v_0, \dots, v_{m-1}\}$

Zuerst ordnen wir H nach den Nebenklassen $v_0 \circ G, \dots, v_{m-1} \circ G$ von G an.

Für $v \in \mathcal{U}_{t+1}$ definieren wir jeweils die Abbildung $f_v : G \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f_v \geq 0$

durch $f_v(g) = f(v \circ g)$ für alle $g \in G$

Dann ist die Matrix $M(f)$ aufgebaut aus m^2 quadratischen Untermatrizen der Form $M(f_v)$: $M(f) = (M(f_{v_i \circ v_j^{-1}}))_{i, j = 0, \dots, m-1}$

Es folgt $\text{Rang } M(f_v) \leq \text{Rang } M(f)$ für alle $v \in \mathcal{U}_{t+1}$

Wir erhalten $\text{Rang } M(f_v) < \text{Min} \{p_1, \dots, p_t\}$

Nach der Induktionsvoraussetzung folgt, daß alle Abbildungen f_v konstant sind. Das heißt: Die Abbildung f ist jeweils auf den Nebenklassen von H nach G konstant.

Ordnet man H nach den Nebenklassen von $\mathcal{U}_{t+1}$ an, so ergibt sich analog:

f ist auf den Nebenklassen von H nach $\mathcal{U}_{t+1}$ konstant.

Für zwei beliebige Elemente $g_i \circ v_j, g_i \circ v_j$, aus H gilt jedoch

$g_i \circ v_j, g_i \circ v_j \in g_i \circ \mathcal{U}_{t+1}$ und $g_i \circ v_j, g_i \circ v_j \in v_j \circ G$

Es folgt daher $f(g_i \circ v_j) = f(g_i \circ v_j) = f(g_i \circ v_j)$

Somit ist die Abbildung $f : H \longrightarrow \mathbb{Q}$ konstant.

Bemerkung

Für jede Abbildung $f : G \longrightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{g \in G} f(g) = 1$

ist die Matrix $M(f) = (f(g_i \circ g_j^{-1}))_{i, j = 0, \dots, n-1}$ eine doppelstochastische Matrix.

Definition 4

Für jede Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sei $E(f) = \{g \mid g \in G, f(g) \neq 0\}$

Lemma 2

Für alle Abbildungen $f : G \longrightarrow [0, 1]$, $h : G \longrightarrow [0, 1]$ gilt $E(f \times h) = E(f) \circ E(h)$

Beweis:

Wir haben $f \times h(a) = \sum_{g \in G} f(a \circ g^{-1}) \cdot h(g) \geq 0$ für alle $a \in G$

I. Sei $a \in E(f \times h)$

Dann gibt es $g \in G$ mit $f(a \circ g^{-1}) \cdot h(g) > 0$

d.h.: $a \circ g^{-1} \in E(f)$, $g \in E(h)$

Somit ist $a = (a \circ g^{-1}) \circ g \in E(f) \circ E(h)$

II. Sei umgekehrt $a \in E(f)$, $b \in E(h)$

Aus $f \times h(a \circ b) \geq f(a) \cdot h(b) > 0$ folgt $a \circ b \in E(f \times h)$

Jeder Abbildung $f : G \longrightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{g \in G} f(g) = 1$ können wir die Folge

$f_1, f_2, \dots \in [0, 1]^G$ zuordnen mit $f_n = f \times \dots \times f$ und $f_1 = f$
n-mal

Wir fragen: Wann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \text{const}$?

Dies ist äquivalent zur Frage nach der Konvergenz der doppelstochastischen Matrizen $M(f_n) = M(f)^n$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Theorem 1

Es sei $f : G \longrightarrow [0, 1]$ eine Abbildung mit $\sum_{g \in G} f(g) = 1$

und $E(f) = \{g \mid g \in G, f(g) \neq 0\}$ ein Erzeugendensystem von G mit $e \in E(f)$.

$$\text{Dann gilt } \lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Wir geben zwei verschiedene Beweise, einmal mit Hilfe der Regularität von $M(f)$ und danach durch Diagonalisierung dieser Matrix.

1. Beweis:

Aus $e \in E(f)$ folgt $E(f) \subset E(f)^2 \subset \dots \subset E(f)^i \subset G \quad i = 1, 2, \dots$

Da G eine endliche abelsche Gruppe ist, gibt es eine natürliche Zahl p mit $E(f)^p = E(f)^{p+1}$

Daraus folgt, daß $E(f)^p$ eine in G multiplikativ abgeschlossene Teilmenge ist. Somit ist $E(f)^p$ eine Untergruppe von G .

Da nach Voraussetzung $E(f)$ ein Erzeugendensystem von G ist, folgt $E(f)^p = G$

Wir bezeichnen mit $f_p : G \longrightarrow [0, 1]$ die Abbildung $f_p = f \times \dots \times f$
p-mal

Wir wenden Lemma 2 an und erhalten $G = E(f)^p = E(f_p)$

Da wir weiterhin nach Satz 1 a) $M(f_p) = M(f)^p$ haben, sind alle Elemente der Matrix $M(f)^p$ positiv.

$M(f)$ ist somit eine reguläre doppelstochastische Matrix.

Nach M. Pearl [17] Theorem 3.3.18. folgt für jede reguläre doppel-

stochastische Matrix aus $[0, 1]^{n^2} : \lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$

2. Beweis:

Nach Lemma 1 a) gibt es für $M(f)$ folgende Diagonalisierung:

$$M(f) = N \circ \Delta \circ N^{-1}$$

mit $N = M \begin{pmatrix} \bar{G} \\ \hat{G} \end{pmatrix} (1_G)$ und $\Delta = \text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right)$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } M(f)^i &= (N \circ \Delta \circ N^{-1})^i = N \circ \Delta^i \circ N^{-1} \\ &= N \circ \text{DIAG} \left(\left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_0(g) \right)^i, \dots, \left(\sum_{g \in G} f(g) \chi_{n-1}(g) \right)^i \right) \circ N^{-1} \end{aligned}$$

Es sei $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ein nicht-trivialer Charakter.

Es folgt $\chi \mid E(f) \neq 1$, da $E(f)$ ein Erzeugendensystem von G ist.

Es gibt daher $g \in E(f)$ mit $\chi(g) \neq 1$

Wir haben $g, e \in E(f)$ mit $\chi(g) \neq \chi(e) = 1$

Deshalb liegt der Punkt $\sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$ als echte Konvexkombination der

Extremalpunktmenge $\{ \chi(g) \mid g \in G \} \subset S^1$ im Innern des Einheitskreises:

$$\left| \sum_{g \in G} f(g) \chi_i(g) \right| < 1 \text{ für } i = 1, \dots, n-1$$

Wir erhalten die Konvergenz $\lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i = N \circ \text{DIAG}(1, 0, \dots, 0) \circ N^{-1}$

Es folgt weiterhin $\text{Rang}(\lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i) = \text{Rang}(\text{DIAG}(1, 0, \dots, 0)) = 1$

Wir benutzen jetzt, daß die Matrix $\lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i$ doppelstochastisch ist.

Da ihr Rang 1 beträgt, unterscheiden sich die Zeilen der Matrix $\lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i$ nur um einen Faktor. Dieser Faktor ist jedoch 1, da die

Zeilensummen der Matrix jeweils 1 sind. Aus der Tatsache, daß alle Zeilen dieser Matrix identisch sind und ihre Spaltensummen 1 sind,

$$\text{folgt weiterhin } \lim_{i \rightarrow \infty} M(f)^i = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

§ 2 Gleichverteilung in Blöcken über einer endlichen abelschen Gruppe G und Blockarithmetik

Es sei G^* die freie Halbgruppe der Worte über der Menge G . Wir bezeichnen die nicht leeren Elemente aus G^* auch als Blöcke. Mit $|v|$ bezeichnen wir die Länge des Wortes v aus G^* .

Definition 5

Wir definieren die relative Häufigkeit, daß Blöcke aus G^* in einem fest vorgegebenen Block aus G^* bzw. Folge aus $G^{\mathbb{N}}$ vorkommen. Wenn $\omega \in G^*$ bzw. $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ vorgegeben sind, definieren wir:

$$\omega(t, i) = (\omega_t, \omega_{t+1}, \dots, \omega_{t+i-1})$$

Für $v \in G^*$ und $t \in \mathbb{N}$ definieren wir weiterhin:

$$1_t[v](\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } v = \omega(t, |v|) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir sagen, daß der Block v in ω an der Stelle t vorkommt, wenn

$$1_t[v](\omega) = 1 \text{ gilt.}$$

Für Blöcke $v, w \in G^*$ mit $|w| \leq |v|$

bezeichnet $r_w(v) = \frac{1}{|v|} \sum_{t=0}^{|v|-|w|} 1_t[w](v)$ die relative Häufigkeit

des Auftretens von w in v .

Es gilt dann $0 \leq r_w(v) \leq 1$

Definition 6

Für jeden Block $v \in G^*$ definieren wir die Abbildung $\tilde{v} : G \longrightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ der relativen Häufigkeit der Elemente aus G in v .

durch $\tilde{v}(g) = r_g(v)$ für alle $g \in G$

Es gilt offensichtlich $\sum_{g \in G} \tilde{v}(g) = 1$

Definition 7

Jedem Block $v \in G^*$ ordnen wir die doppelstochastische Matrix $\hat{v} = M(\tilde{v}) = (r_{g_i \circ g_j^{-1}}(v))_{i,j=0, \dots, n-1}$ aus $\mathbb{Q}^{n^2}$ zu.

1 - $|\text{DET}(\hat{v})|$ ist ein "Maß für die Gleichverteilung" der Gruppenelemente aus G in dem Block v .

Theorem 2

Es sei v ein beliebiger Block aus G^*

Dann gelten folgende Aussagen:

- $|\text{DET}(\hat{v})| \leq 1$
- $|\text{DET}(\hat{v})| = 1$ dann und nur dann, wenn $\hat{v}$ eine Permutationsmatrix ist, was gleichbedeutend damit ist, daß es ein $g \in G$ gibt mit $v = g \dots g$ m -Mal.
- Die Elemente aus G sind dann und nur dann in dem Block v gleichverteilt $r_g(v) = 1/n$ für alle $g \in G$, wenn der Rang der Matrix $\hat{v}$ kleiner als die kleinste Primzahl ist, die die Gruppenordnung $(G : e) = n$ teilt.
- Ist zusätzlich G eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung, so sind die Elemente aus G dann und nur dann in v gleichverteilt, wenn $\text{DET}(\hat{v})$ verschwindet.
- Es sei G eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung mit $(G : e) \neq |v|$. Dann ist $\text{DET}(\hat{v}) \neq 0$.

Beweis:

- Aus der Hadamard'schen Ungleichung folgt:

$$\text{DET}(\hat{v})^2 \leq \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (r_{g_i, g_j^{-1}}(v))^2 \leq \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} r_{g_i, g_j^{-1}}(v) = 1$$

- folgt unmittelbar aus der Hadamard'schen Ungleichung.
- folgt aus Satz 4
- folgt aus c)
- Aus $(G : e) \neq |v|$ folgt, daß die Elemente von G in v nicht gleich verteilt sind. Deshalb ergibt sich nach d) $\text{DET}(\hat{v}) \neq 0$

Es seien G, G' endliche, abelsche Gruppen

$h : G \longrightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus und $h^* : G^* \longrightarrow G'^*$

die Fortsetzung von h zu einem Monoidhomomorphismus auf den Worthalbguppen G^*, G'^*

d.h. $h^*(g_0 \dots g_{t-1}) = h(g_0) \dots h(g_{t-1})$ für alle $g_0, \dots, g_{t-1} \in G, t \in \mathbb{N}$

Nach dem Homomorphiesatz gilt $G' \cong G / \text{Kern } h$

Für jeden Block $w \in G^*$ bewirkt die Abbildung h^* somit eine Identifizierung aller Elemente aus Kern h , die in w vorkommen.

D. h. die Gleichverteilung in $w \in G^*$ beim Übergang in $h^*(w) \in G'^*$ kann höchstens gleich bleiben oder abnehmen.

Diese Überlegungen führen zu folgender Aussage.

Theorem 3

Es seien G, G' endliche, abelsche Gruppen, $h : G \rightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus und $h^* : G^* \rightarrow G'^*$ die Fortsetzung von h zu einem Monoidhomomorphismus auf den Worthalbguppen G^*, G'^*

Dann gilt für jeden Block $w \in G^* : |\text{DET}(\widehat{w})| \leq |\text{DET}(\widehat{h^*(w)})|$

Beweis:

Es seien $\bar{G}, \bar{G}'$ die Charaktergruppen von G bzw. G'

Aus h surjektiver Homomorphismus folgt, daß die Abbildung $i : \bar{G}' \rightarrow \bar{G}$ mit $i(\chi') = \chi' \circ h \forall \chi' \in \bar{G}'$ injektiv ist.

Wir beachten diese Tatsache und wenden Lemma 1 c) an.

Sei $w \in G^*$ ein beliebiger Block.

$$\begin{aligned} \text{DET}(\widehat{h^*(w)}) &= \prod_{\chi' \in \bar{G}'} \left| \sum_{g' \in G'} r_{g'}(h^*(w)) \chi'(g') \right| \\ &= \prod_{\chi' \in \bar{G}'} \left| \sum_{g' \in G'} \left(\sum_{g \in h^{-1}(g')} r_g(w) \right) \chi'(g') \right| \\ &= \prod_{\chi' \in \bar{G}'} \left| \sum_{g \in G} r_g(w) i(\chi')(g) \right| \geq \prod_{\chi \in \bar{G}} \left| \sum_{g \in G} r_g(w) \chi(g) \right| = |\text{DET}(\widehat{w})| \end{aligned}$$

Definition 0

Wir erklären jetzt zusammengesetzte Blöcke aus G^* und definieren dazu eine weitere assoziative Multiplikation $\times : G^* \times G^* \rightarrow G^*$, die jedoch die Gruppenstruktur der Menge G berücksichtigt.

$$v \times w = (v_0 \circ g) \dots (v_{i-1} \circ g), \quad v \times w = (v \times w_0) \dots (v \times w_{j-1})$$

$$\text{für alle } v, w \in G^*, g \in G \quad v = v_0 \dots v_{i-1}, \quad w = w_0 \dots w_{j-1}$$

$$v_0, \dots, v_{i-1}, w_0, \dots, w_{j-1} \in G$$

Dabei ist $\circ : G \times G \longrightarrow G$ die Gruppenmultiplikation
und $\cdot : G^* \times G^* \longrightarrow G^*$ die Multiplikation in der freien Halbgruppe G^*
über der Menge G .

Wir schreiben auch $v \times w = \prod_{k=0}^{j-1} v \times w_k$

Satz 5

Seien v, w beliebige Blöcke aus G^* .
Dann gelten folgende "Rechenregeln".

- a) $\widetilde{v \times w} = \widetilde{v} \times \widetilde{w}$
- b) $\widehat{v \times w} = \widehat{v} \circ \widehat{w}$
- c) $\widehat{v} \circ \widehat{w} = \widehat{w \circ v}$
- d) $\text{DET}(\widehat{v \times w}) = \text{DET}(\widehat{v}) \cdot \text{DET}(\widehat{w})$
- e) $|\text{DET}(\widehat{v \times g})| = |\text{DET}(\widehat{v})|$ für alle $g \in G$

Beweis:

- a) wir haben für relative Häufigkeit, daß das Element $g \in G$
in dem Produkt von v und w vorkommt die Beziehung

$$\widetilde{v \times w}(g) = r_g(v \times w) = \sum_{\substack{a, b \in G \\ a \circ b = g}} r_a(v) \cdot v_b(w) = \sum_{\substack{a, b \in G \\ a \circ b = g}} \widetilde{v}(a) \cdot \widetilde{w}(b) \\ = (\widetilde{v} \times \widetilde{w})(g)$$
- b) Aus a) folgt $\widehat{v \times w} = M(\widetilde{v \times w}) = M(\widetilde{v} \times \widetilde{w})$
 Nach Satz 1 a) ist jedoch $M(\widetilde{v} \times \widetilde{w}) = M(\widetilde{v}) \circ M(\widetilde{w}) = \widehat{v} \circ \widehat{w}$
- c) folgt unmittelbar aus Satz 1 b).
- d) folgt aus b) nach dem Determinantenproduktsatz.
- e) g bewirkt nur eine Vertauschung der Spalten in der Matrix $\widehat{v}$.

Lemma 3

Für Blöcke $v, w, D \in G^*$ mit $\frac{|v|}{|w|} < \varepsilon$ gilt für die relative Häufigkeit
des Blockes v in dem Produkt von w und D die Abschätzung

$$\left| r_v(w \times D) - \sum_{g \in G} r_{v \times g^{-1}}(w) \cdot r_g(D) \right| < \varepsilon$$

Beweis:

Sei $|v| = r$ und $|D| = s$

Es gibt folgende Darstellung für $w \times D$

$$w \times D = \prod_{i=0}^{s-1} w \times d_i \text{ mit } D = d_0 \dots d_{s-1} \quad d_0, \dots, d_{s-1} \in G$$

Zu jeder Grenze zweier benachbarter Blöcke $w \times d_i, w \times d_{i+1} \quad i = 0, \dots, s-2$

gibt es höchstens $r - 1$ Elemente $g_{i, 1}, \dots, g_{i, r-1} \in G$, so daß die Blöcke $v \times g_{i, 1}, \dots, v \times g_{i, r-1}$ die Grenze überlappen.

Wir erzielen daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} |r_v(w \times D) - \sum_{g \in G} r_{v \times g^{-1}}(w) \cdot r_g(D)| &\leq \frac{(s-1) \cdot (r-1)}{|w \times D|} \\ &= \frac{(|D| - 1) (|v| - 1)}{|w| \cdot |D|} < \frac{|v|}{|w|} < \xi \end{aligned}$$

Für einen Block $v \in G^*$ und eine Folge $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ setzen wir

$$r_v(\omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} r_v(\omega(1, i)), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und}$$

sprechen von der relativen Häufigkeit des Blockes v in ω . Die Existenz von $r_v(\omega)$ ist äquivalent mit der Existenz von $\lim_{i \rightarrow \infty} r_v(w(t, i))$ für jedes $t \in \mathbb{N}$. In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich.

Man sagt, daß $r_v(\omega)$ gleichförmig existiert, wenn die Grenzwerte $\lim_{i \rightarrow \infty} r_v(\omega(t, i))$ gleichförmig in $t \in \mathbb{N}$ existieren.

Definition 9

Der Punkt $\omega \in G^{\mathbb{N}}$ heißt strikt transitiv, wenn $r_v(\omega)$ gleichförmig für jeden Block $v \in G^*$ existiert.

§ 3 Strikt transitive, rekurrente Folgen in $G^{\mathbb{N}}$

Bestehende Voraussetzung, wenn nicht weiter spezialisiert:
 G endliche abelsche Gruppe.

Definition 10

Wir nennen eine Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ mit Blöcken aus G^* , die alle mit dem Einselement aus G beginnen und deren Länge mindestens 2 beträgt eine einfache Blockfolge.

Dann wird durch $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots$ ein Element aus $G^{\mathbb{N}}$ definiert M. Keane [12]
d.h. $\omega(1, |A_1|) = A_1$ $\omega(1, |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i|) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$
für alle $i \in \mathbb{N}$

Definition 11

Eine Folge $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in G^{\mathbb{N}}$ heißt rekurrente Folge, wenn es eine einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ gibt
mit $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots$

Wir untersuchen im folgenden, wann rekurrente Folgen strikt transitiv sind.

Definition 12

Wir ordnen jeder einfachen Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$
die Menge $\mathcal{U}(A)$ aller Elemente aus G zu, die in allen
Folgen $\omega^i = A_1 \times A_{i+1} \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ vorkommen.

$$\mathcal{U}(A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \omega^i [\mathbb{N}]$$

Sei $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \dots) \in G^{\mathbb{N}}$ für $i = 1, 2, \dots$

Dann können wir auch schreiben:

$$\mathcal{U}(A) = \{ g \mid g \in G \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \exists j = j(i, g) \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega_j^i = g \}$$

Lemma 4

Für jede einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ ist $\mathcal{U}(A)$
eine Untergruppe von G .

Beweis:

Wir haben $\mathcal{U}(A) \neq \emptyset$, da $e \in \mathcal{U}(A)$

Wegen der Endlichkeit von G genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{U}(A) \subset G$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Seien $a, b \in \mathcal{U}(A)$ und $\omega^i = A_1 \times A_{i+1} \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ $i \in \mathbb{N}$

Wir beweisen: Es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $\omega_j^i = a \circ b$ wobei $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \dots)$

Aus $a \in \mathcal{U}(A)$ folgt: Es gibt $i' \in \mathbb{N}$ $i < i'$, so daß a in dem Block $A_1 \times A_{i'+1} \times \dots \times A_{i'}$ vorkommt.

Aus $b \in \mathcal{U}(A)$ folgt: Es gibt $i'' \in \mathbb{N}$ $i' < i''$, so daß b in dem Block $A_{i'+1} \times A_{i'+2} \times \dots \times A_{i''}$ vorkommt.

Deshalb kommt $a \circ b$ in dem Block $(A_1 \times \dots \times A_{i'}) \times (A_{i'+1} \times \dots \times A_{i''})$
 $= A_1 \times \dots \times A_{i''}$ vor. Somit gibt es $j \in \mathbb{N}$ mit $a \circ b = \omega_j^i$

Lemma 5

Für jede einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $A_i, A_{i+1}, \dots \in \mathcal{U}(A)^*$

Beweis:

Angenommen es gibt eine Folge $(i_1, i_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $i_1 < i_2 < \dots$ und $A_{i_j} \notin \mathcal{U}(A)^*$ für $j = 1, 2, \dots$

Es gibt dann $g \in G \setminus \mathcal{U}(A)$ und eine Teilfolge $(i_{1_1}, i_{1_2}, \dots)$

von $(i_1, i_2, \dots)$ mit $r_g(A_{i_{1_j}}) > 0$ für $j = 1, 2, \dots$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen i_{1_j} aus mit $k < i_{1_j}$

Da g in $A_{i_{1_j}}$ vorkommt, kommt g auch in $A_k \times A_{k+1} \times \dots \times A_{i_{1_j}}$ vor

und somit auch in $\omega_{\infty}^k = A_k \times A_{k+1} \times \dots$

Es folgt $g \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \omega^k[\mathbb{N}] = \mathcal{U}(A)$ Widerspruch!

Wir machen jetzt Konvergenzaussagen über die relative Häufigkeit von Blöcken der Länge 1 bei rekurrenten Folgen.

Satz 6

Es sei $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ eine einfache Blockfolge und $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ die zugehörige rekurrente Folge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Der Grenzwert $r_g(\omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} r_g(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i)$ existiert für alle $g \in G$.
- b) Die Matrix $\hat{\omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{A}_1 \circ \hat{A}_2 \circ \dots \circ \hat{A}_i)$ existiert, wobei dann $\hat{\omega} = (r_{g_i \circ g_j^{-1}}(\omega))_{i, j = 0, \dots, n-1}$ gilt.
- c) $\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi(g)$ existiert für alle Charaktere $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$

Beweis:

a) $\longleftrightarrow$ b)

Indem wir Satz 5 b) anwenden, erhalten wir die Äquivalenz von a) und b)

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= (r_{g_i \circ g_j^{-1}}(\omega))_{i, j = 0, \dots, n-1} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (r_{g_i \circ g_j^{-1}}(A_1 \times \dots \times A_i))_{i, j = 0, \dots, n-1} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{A_1 \times \dots \times A_i}_{\hat{A}_1 \circ \dots \circ \hat{A}_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{A}_1 \circ \dots \circ \hat{A}_i) \end{aligned}$$

b) $\longleftrightarrow$ c)

Für die Matrizen $\hat{A}_i$ gibt es nach Lemma 1 a) folgende Diagonalisierung

$$\hat{A}_i = M(\hat{A}_i) = N \circ \text{DIAG} \left(\sum_{g \in G} \hat{A}_i(g) \chi_0(g), \dots, \sum_{g \in G} \hat{A}_i(g) \chi_{n-1}(g) \right) \circ N^{-1}$$

Dabei ist N eine nicht-singuläre Matrix, $\bar{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$ ist die Gruppe der Charaktere von G und $\hat{A}_i(g) = r_g(A_i)$ für alle $g \in G$.

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } \hat{A}_1 \circ \hat{A}_2 \circ \dots \circ \hat{A}_i &= \\ N \circ \text{DIAG} \left(\prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi_0(g), \dots, \prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi_{n-1}(g) \right) \circ N^{-1} \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang erkennt man die Äquivalenz von b) und c).

Bemerkung

Gilt eine der Aussagen von Satz 6, so folgt nach dem Determinanten-

$$\text{duksatz} \quad \text{DET}(\hat{\omega}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^i \text{DET}(\hat{A}_k)$$

Wir fordern jetzt zusätzlich, daß die Grenzwerte $r_g(\omega)$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} r_g(A_1 \times \dots \times A_i) \text{ konstant sind für alle } g \in G.$$

Corollar 2

Es sei $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ eine einfache Blockfolge, $(G : e) = n$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

$$\text{a) } \lim_{i \rightarrow \infty} r_g(A_1 \times \dots \times A_i) = \text{const. für alle } g \in G$$

$$\text{b) } \lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{A}_1 \circ \dots \circ \hat{A}_i) = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi(g) = 0 \text{ für alle nicht-trivialen Charaktere}$$

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Beweis:

Die Äquivalenz von a), b) und c) folgt analog zu dem Beweis von Satz 6,

wenn man berücksichtigt, daß die Elemente der doppelstochastischen

Matrix $\lim_{i \rightarrow \infty} (\hat{A}_1 \circ \dots \circ \hat{A}_i)$ dann und nur dann alle identisch sind, wenn

ihr Rang 1 beträgt, d.h. wenn die bei der Diagonalisierung dieser

Matrix auftretenden Hauptdiagonalelemente $\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi(g)$

bei nicht-trivialem Charakter $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ verschwinden.

Wir geben nun notwendige Bedingungen für die strikte Transitivität von rekurrenten Folgen.

Satz 7

Es sei $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ eine einfache Blockfolge und die Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ sei strikt transitiv. Dann gelten folgende Aussagen:

- Die Matrix $\widehat{\omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\widehat{A}_1 \circ \dots \circ \widehat{A}_i)$ existiert.
- $\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^i \sum_{g \in G} r_g(A_k) \chi(g)$ existiert für alle Charaktere $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$
- Für alle Blöcke $D \in G^*$ und alle $u \in \mathcal{U}(A)$ gilt

$$r_D(\omega) = r_{D \times u}(\omega)$$
 Somit haben auch alle Elemente $g \in G$, die in der gleichen Nebenklasse von G nach $\mathcal{U}(A)$ liegen, den gleichen Grenzwert $r_g(\omega)$.
- Der Rang der Matrix $\widehat{\omega}$ ist höchstens so groß wie die Anzahl der Nebenklassen von G nach $\mathcal{U}(A)$. $\text{Rang } \widehat{\omega} \leq |G/\mathcal{U}(A)|$

Beweis:

a) und b)

Für jedes $g \in G$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert der Grenzwert $r_g(\omega)$
 $= \lim_{i \rightarrow \infty} r_g(\omega(k, i))$ und sogar gleichmäßig in k , da nach Voraussetzung

ω strikt transitiv ist.

Daraus folgt die schwächere Aussage $r_g(\omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} r_g(A_1 \times \dots \times A_i)$
 existiert für alle $g \in G$.

Hieraus folgt nach Satz 6 die Gültigkeit von a) und b).

c)

Es sei $D \in G^*$ ein Block mit $r_D(\omega) = \alpha$

Wir zeigen: $r_{D \times u}(\omega) = \alpha$ für ein beliebiges $u \in \mathcal{U}(A)$

Nach Voraussetzung gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, so daß
 $|\alpha - r_D(\omega(k, i))| < \varepsilon$ für alle $i \geq M$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $t \in \mathbb{N}$ genügend groß, so daß $|A_1 \times \dots \times A_t| \geq M$ gilt.

Aus $u^{-1} \in \mathcal{U}(A)$ folgt, daß u^{-1} in $\omega^{t+1} = A_{t+1} \times A_{t+2} \times \dots$ vorkommt.

Deshalb erscheint $(A_1 \times \dots \times A_t) \times u^{-1}$ in $\omega = (A_1 \times \dots \times A_t) \times \omega^{t+1}$ an einer bestimmten Stelle und wir haben $|\alpha - r_D((A_1 \times \dots \times A_t) \times u^{-1})| < \varepsilon$

Es ist jedoch $r_D((A_1 \times \dots \times A_t) \times u^{-1}) = r_{D \times u}(A_1 \times \dots \times A_t)$ und aus

$$\left| \alpha - r_{D \times u}(A_1 \times \dots \times A_t) \right| < \epsilon \text{ ergibt sich}$$

$$r_{D \times u}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_{D \times u}(A_1 \times \dots \times A_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_D(A_1 \times \dots \times A_t) = \alpha$$

d) Wir ordnen die Gruppenelemente von G nach den Nebenklassen

$b_0 \circ \mathcal{U}(A), b_1 \circ \mathcal{U}(A), \dots, b_{q-1} \circ \mathcal{U}(A)$ von G nach $\mathcal{U}(A)$ an und bilden mit dieser Anordnung von G die Matrix $\hat{\omega}$.

Es sei $\tilde{\omega}: G \longrightarrow [0, 1]$ die Abbildung mit $\tilde{\omega}(g) = r_g(\omega)$ für alle $g \in G$.

Wir definieren dann für beliebiges $g \in G$ die Abbildung $\tilde{\omega}_g: \mathcal{U}(A) \longrightarrow [0, 1]$

mit $\tilde{\omega}_g(a) = \tilde{\omega}(g \circ a)$ für alle $a \in \mathcal{U}(A)$

Dann ist die Matrix $\hat{\omega}$ aufgebaut aus q^2 quadratischen Untermatrizen der

Form $M(\tilde{\omega}_g)$:
$$\hat{\omega} = M(\tilde{\omega}) = (M(\tilde{\omega}_{b_i \circ b_j^{-1}}))_{i, j = 0, \dots, q-1}$$

Nach c) sind die Abbildungen $\tilde{\omega}_g$ jeweils konstant. Deshalb sind die

Elemente einer beliebigen Matrix $M(\tilde{\omega}_g)$ alle gleich.

Hieraus folgt, daß die Spalten der Matrix
$$\begin{pmatrix} M(\tilde{\omega}_{b_0 \circ b_j^{-1}}) \\ \vdots \\ M(\tilde{\omega}_{b_{q-1} \circ b_j^{-1}}) \end{pmatrix} \text{ gleich}$$

sind für $j = 0, \dots, q-1$

Damit haben wir nachgewiesen, daß es in $\hat{\omega}$ höchstens q linear unabhängige Spalten gibt.

Beim Auftreten eines Blockes B in einer Folge ω aus $G^{\mathbb{N}}$ kann es zu Überlappungen von B in ω kommen. Dies müssen wir bei der Berechnung der relativen Häufigkeit $r_B(\omega)$ des Blockes B in der Folge ω berücksichtigen. Wir analysieren deshalb, welchen Aufbau ein Block besitzt, der zwei aufeinanderfolgende Blöcke überlappt, die sich von ihm jeweils nur durch einen Faktor unterscheiden.

Satz 8

Es seien a, b, c Elemente einer abelschen Gruppe G und D ein beliebiger Block aus G^* .

Der Block $D \times c$ komme in dem Block $D \times a \cdot D \times b$ vor und überlappe die Grenze der Blöcke $D \times a, D \times b$.

Das heißt: Wir haben Blöcke $E_1, E_1' \in G^*$ mit $D \times a \cdot D \times b = E_1 \cdot D \times c \cdot E_1'$ und $0 < |E_1| < |D|$

E_1	$D \times c$	E_1'
$D \times a$	$D \times b$	

Dann gibt es einen Block $v \in G^*$ und Elemente $g \in G, p \in \mathbb{N}$

mit $D = v \times (eg^1 \dots g^{p-1})$ und $|v| = ggT(|D|, |E_1|)$

g hat außerdem die Darstellung $g = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Wir setzen $v_1 = E_1 \times a^{-1}, v_1' = E_1' \times b^{-1}$ und haben wegen $|E_1| + |E_1'| = |D|$
 $D = v_1 \cdot v_1'$

Wir definieren $b_0 = a^{-1} \cdot b, b_1 = a^{-1} \cdot c$

und erhalten dann $D \cdot D \times b_0 = v_1 \cdot D \times b_1 \cdot v_1' \times b_0$

Es folgt aus $v_1 \cdot (v_1' \cdot v_1 \times b_0) \cdot v_1' \times b_0 = v_1 \cdot D \times b_1 \cdot v_1' \times b_0$

die Beziehung $D \times b_1 = v_1' \cdot v_1 \times b_0$

Es ergibt sich für die unendliche Folge

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i &= \prod_{i=0}^{\infty} (v_1 v_1') \times b_0^i = v_1 \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (v_1' \cdot v_1 \times b_0) \times b_0^i \\ &= v_1 \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (D \times b_1) \times b_0^i = v_1 \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i \right) \times b_1 \end{aligned}$$

Aus $\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = v_1 \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i \right) \times b_1$ folgt iterativ

$$\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_1 \times b_1^i$$

Wir zeigen, daß falls die Länge des Blockes v_1 nicht die Länge des Blockes D teilt, es einen Block $V_2 \in G^*$ und Elemente $b_2 \in G, q_1 \in \mathbb{N}$ gibt

$$\text{mit } \prod_{i=0}^{\infty} v_1 \times b_1^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_2 \times b_2^i \text{ und } |D| + |v_2| = q_1 \cdot |v_1|, \quad |v_2| < |v_1|$$

Aus $|v_1| \neq |D|$ folgt die Existenz eines Blockes $v_2' \in G^*$ und einer natürlichen Zahl q_1 mit $0 < |v_2'| < |v_1|$ und

$$\prod_{j=0}^{q_1-1} v_1 \times b_1^j = D \cdot v_2'$$

Es folgt für die unendliche Folge

$$\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_1 \times b_1^i = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{q_1-1} v_1 \times b_1^j \right) \times (b_1^{q_1})^i$$

$$= \prod_{i=0}^{\infty} (D \cdot v_2') \times (b_1^{q_1})^i$$

$$\text{Man erhält daher } D \cdot \prod_{i=1}^{\infty} D \times b_0^i = D \cdot v_2' \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (D \cdot v_2') \times (b_1^{q_1})^i$$

Es ergibt sich durch Wegschneiden von D und anschließendes Ausklammern

$$\left(\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i \right) \times b_0 = v_2' \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} (D v_2') \times (b_1^{q_1})^i \right) \times b_1^{q_1} = v_2' \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i \right) \times b_1^{q_1}$$

Wir setzen $v_2 = v_2' \times b_0^{-1}$, $b_2 = b_0^{-1} \cdot b_1^{q_1}$ und erhalten aus

$$\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = v_2' \cdot \left(\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i \right) \times b_2 \text{ wiederum durch Iteration}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_2 \times b_2^i \text{ mit } |v_2| = |v_2'| < |v_1|$$

Wir wenden den euklidischen Algorithmus an und erhalten Folgen

$$v_1, v_2, \dots, v_m \in G^* \quad b_0, b_1, \dots, b_m \in G \quad q_1, \dots, q_m \in \mathbb{N}$$

$$\text{mit } \prod_{i=0}^{\infty} D \times b_0^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_1 \times b_1^i = \prod_{i=0}^{\infty} v_2 \times b_2^i = \dots = \prod_{i=0}^{\infty} v_m \times b_m^i$$

$$|D| + |v_2| = q_1 \cdot |v_1| \text{ mit } |v_2| < |v_1|$$

$$|v_1| + |v_3| = q_2 \cdot |v_2| \text{ mit } |v_3| < |v_2|$$

⋮

$$|v_{m-2}| + |v_m| = q_{m-1} \cdot |v_{m-1}| \text{ mit } |v_m| < |v_{m-1}|$$

$$|v_{m-1}| = q_m \cdot |v_m|$$

$$\text{Es folgt } \text{ggT}(|D|, |v_1|) = \text{ggT}(|v_1|, |v_2|) = \dots$$

$$= \text{ggT}(|v_{m-1}|, |v_m|) = |v_m|$$

$$\text{Wir setzen } v_m = v, \quad g = b_m \circ b_0^{-1}$$

Wir geben jetzt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine rekurrente Folge aus $G^{\mathbb{N}}$ strikt transitiv ist.

Satz 9

Gegeben sei die einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$
 Die Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ ist dann und nur dann strikt transitiv, wenn $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_j)$ für alle $u \in \mathcal{U}(A)$ und fast alle $i \in \mathbb{N}$ existiert und denselben, von i und u unabhängigen Wert const. hat.

Beweis:

Wir schreiben zur Abkürzung für $i, j \in \mathbb{N} \quad i \leq j$

$$A[i, j] = A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_j \in G^*$$

$$\omega^i = A_i \times A_{i+1} \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$$

a) Es sei ω strikt transitiv.

Zu zeigen: $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[i, j])$ existiert für alle $u \in \mathcal{U}(A)$ und für fast alle $i \in \mathbb{N}$ und hat denselben von i und u unabhängigen Wert const.

Nach Lemma 5 gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $A_k, A_{k+1}, \dots \in \mathcal{U}(A)^*$

Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $i+1 \geq k$

Für ω haben wir die Darstellung $\omega = A[1, i] \times \omega^{i+1}$ mit $\omega^{i+1} \in \mathcal{U}(A)^{\mathbb{N}}$

Deshalb ist ω aus Blöcken $A[1, i] \times u, u \in \mathcal{U}(A)$ aufgebaut.

Wir unterscheiden danach, ob sich in ω Blöcke $A[1, i] \times u$ überlappen.

1. Fall:

Es treten keine Überlappungen von Blöcken $A[1, i] \times u, u \in \mathcal{U}(A)$ in ω auf.

Dann ergibt sich $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[i+1, j]) = \lim_{j \rightarrow \infty} |A[1, i]| \cdot r_{A[1, i] \times u}(A[1, i] \times A[i+1, j])$

$$= |A[1, i]| \cdot r_{A[1, i] \times u}(\omega) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}(A)$$

Nach Satz 7 c) folgt $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[i+1, j]) = \text{const.}$ für alle $u \in \mathcal{U}(A)$.

2. Fall:

Es gebe einen Block $A[1, i] \times c$, der in einem Block

$A[1, i] \times a \cdot A[1, i] \times b$ von ω vorkommt und die Grenze der

Blöcke $A[1, i] \times a, A[1, i] \times b$ überlappt mit $a, b, c, \in \mathcal{U}(A)$.

Dann gibt es nach Satz 8 einen Block $v \in G^*$ und Elemente $g \in \mathcal{U}(A)$, $p \in \mathbb{N}$ mit $A[1,i] = v \times (e g \dots g^{p-1}) \quad |v| < |A[1,i]| \quad (*)$

Es sei dies schon diejenige "zyklische Darstellung" von $A[1,i]$ in ω mit minimaler Länge $|v|$.

Es gibt dann keinen Block $v \times c'$ mehr, der in einem Block $v \times a' \cdot v \times b'$ von ω so vorkommt, daß er die Grenze der Blöcke $v \times a'$, $v \times b'$ überlappt mit a' , b' , $c' \in \mathcal{U}(A)$.

Denn andernfalls erhalten wir nach Satz 8 für v ebenfalls einen "zyklischen Aufbau" $v = v' \times (e g' \dots g'^{p'-1})$ mit $v' \in G^*$, $g' \in \mathcal{U}(A)$, $p' \in \mathbb{N}$ und $|v'| < |v|$. Aus der Überlappung der Blöcke $v \times a'$, $v \times b'$ durch $v \times c'$ würde sich dann weiterhin ergeben $A[1,i] = v' \times (e g' \dots g'^{p'-1})$ d.h. $(*)$ wäre keine "zyklische Darstellung" von $A[1,i]$ mit minimaler Länge $|v|$ Widerspruch!

Wir prüfen nun, ob ω die Darstellung $v \times (e g^2 \dots)$ besitzt oder nicht.

Im Falle $\omega = v \times (e g^2 \dots)$ ergibt sich

$$\omega^{i+1} = (e g^p (g^p)^2 \dots) \text{ wobei } \omega^{i+1} = A_{i+1} \times A_{i+2} \times \dots$$

Aus $A_{i+1} \in \mathcal{U}(A)^*$ folgt $\mathcal{U}(A) = \{e, g^p, \dots, (g^p)^{q-1}\}$ wobei q die Ordnung von g^p ist.

$$\text{Wir erhalten } \lim_{j \rightarrow \infty} r_{(g^p)^k} (A[1+i, j]) = \lim_{j \rightarrow \infty} r_{(g^p)^k} (e g^p \dots g^{|A[1+i, j]|-1})$$

$$= r_{(g^p)^k} (e g^p \dots (g^p)^{q-1}) = \frac{1}{q} \text{ für } k = 0, \dots, q-1$$

Sei nun $\omega \neq v \times (e g^2 \dots)$

Aus der Darstellung $\omega = v \times (e g \dots g^{p-1}) \times \omega^{i+1}$ mit $\omega^{i+1} \in \mathcal{U}(A)^{\mathbb{N}}$ erkennen wir, daß ω entsteht durch Aneinanderreihung von Blöcken der Gestalt $v \times (e g \dots g^{p-1}) \times a$, $1 \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{U}(A)$ von maximaler Länge.

$$\text{Das heißt } \omega = v \times ((e g \dots g^{p-1}) \times a_1 \cdot (e g \dots g^{p-1}) \times a_2 \dots)$$

mit $a_k \in \mathcal{U}(A)$, $1_k \in \mathbb{N}$ und $g^{p \cdot 1_k} a_k \neq a_{k+1}$ für $k = 1, 2, \dots$

Wir zeigen nun, daß die Länge dieser "zyklischen Blöcke" von ω beschränkt ist: $1_k \leq s$ für $k = 1, 2, \dots$

Denn es gibt $j \in \mathbb{N}$, $D \in \mathcal{U}(A)^*$ mit

$$A[1, j] = v \times ((e g \dots g^{p^1-1}) \times a_1 \cdot (a_2 \cdot D)) \text{ wobei } g^{p^1-1} \circ a_1 \neq a_2$$

Aus der Darstellung $\omega = A[1, j] \times \omega^{j+1}$ ergibt sich, daß ω aus "nicht-zyklischen" Blöcken $A[1, j] \times u$, $u \in \mathcal{U}(A)$ aufgebaut ist.

Somit erhält man $l_k \leq \frac{2 |A[1, j]|}{p}$ für $k = 1, 2, \dots$

Wir wissen, daß keine Überlappungen von Blöcken $v \times u$, $u \in \mathcal{U}(A)$ in ω auftreten. Deshalb kommen die Blöcke $v \times (a \cdot e g \dots g^{p^1-1} \cdot b) \times c$ mit $1 \leq s$, $a, b, c \in \mathcal{U}(A)$ und $a \circ g \neq e$, $g^{p^1-1} \neq b$ in ω höchstens an den Stellen $|v| \cdot p^1_1, |v| \cdot p^1_2, \dots$ vor

Aus diesen Überlegungen folgt für alle $u \in \mathcal{U}(A)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[i+1, j]) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{\substack{1 \leq l \leq s \\ a, b, c \in \mathcal{U}(A) \\ a \circ g \neq e, g^{p^1-1} \neq b}} |A[1, i]| \cdot l \cdot \Gamma_{v \times (a e g \dots g^{p^1-1} b) \times c} (A[1, j]) \cdot r_u((e(g^p) \dots (g^p)^{l-1}) \times c) \end{aligned}$$

Nach Satz 7c) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[i+1, j]) \\ &= |A[1, i]| \cdot l \cdot (\mathcal{U}(A) : e) \cdot \sum_{\substack{1 \leq l \leq s \\ a, b \in \mathcal{U}(A) \\ a \circ g \neq e, g^{p^1-1} \neq b}} \Gamma_{v \times (a e g \dots g^{p^1-1} b)}(\omega) \left(\sum_{c \in \mathcal{U}(A)} \Gamma_c(e(g^p) \dots (g^p)^{l-1}) \right) \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert ist gleich für alle $u \in \mathcal{U}(A)$.

b) Es sei $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A[1, j]) = \text{const.}$ für alle $u \in \mathcal{U}(A)$ und fast alle $i \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist die gleichmäßige Konvergenz von $\lim_{l \rightarrow \infty} r_B(\omega(k, l))$ in $k \in \mathbb{N}$ für einen beliebigen Block $B \in G^*$.

Dazu beweisen wir zunächst die Existenz von $\lim_{i \rightarrow \infty} r_B(A[1, i])$.

Nach Voraussetzung kann man eine natürliche Zahl i so auswählen, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

- 1.) $A_j \in \mathcal{A}(A)^*$ für $j = i+1, i+2, \dots$
- 2.) $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u (A [i+1, j])$ existiert und ist identisch für alle $u \in \mathcal{U}(A)$
- 3.) $\frac{B}{|A [1, i]|} < \varepsilon$

Sei $(\mathcal{U}(A) : e) = p$

Aus 1) und 2) ergibt sich $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u (A [i+1, j]) = \frac{1}{p}$ für alle $u \in \mathcal{U}(A)$

Wir können wegen 3) Lemma 3 anwenden und erhalten :

$$|r_B (A [1, j]) - \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u}^{-1} (A [1, i]) \cdot r_u (A [i+1, j])| < \varepsilon \text{ für } j = i+1, i+2, \dots$$

Es gibt weiterhin eine natürliche Zahl $N > i$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j > N$ folgende Ungleichung gilt

$$\left| \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u}^{-1} (A [1, i]) \cdot r_u (A [i+1, j]) - \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u}^{-1} (A [1, i]) \cdot \frac{1}{p} \right| < \varepsilon$$

Deshalb haben wir für alle natürlichen Zahlen j, j' mit $j > N, j' > N$

$$|r_B (A [1, j]) - r_B (A [1, j'])| < 4 \varepsilon$$

Nach dem Cauchy-Kriterium erhalten wir die Existenz von

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_B (A [1, i]) = \infty$$

Wir benutzen jetzt die Tatsache, daß $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u (A [i+1, j]) = \frac{1}{p}$ identisch ist

für alle $u \in \mathcal{A}(A)$ und beweisen $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{B \times v} (A [1, i]) = \infty$ für alle $v \in \mathcal{U}(A)$.

Wir haben für $j = i+1, i+2, \dots$ folgende Ungleichung

$$|r_{B \times v} (A [1, j]) - \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times v \times u}^{-1} (A [1, i]) \cdot r_u (A [i+1, j])| < \varepsilon \quad v \in \mathcal{U}(A)$$

Es ergibt sich aus der Gruppenstruktur von $\mathcal{A}(A)$ die Umformung:

$$\sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times v \times u}^{-1} (A [1, i]) \cdot r_u (A [i+1, j])$$

$$= \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times (v \circ u^{-1})}^{-1} (A [1, i]) \cdot r_{(v \circ u^{-1})^{-1} \circ v}^{-1} (A [i+1, j])$$

$$= \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u} (A [1, i]) \cdot r_{u^{-1} \circ v} (A [i+1, j]) \text{ und wir erhalten für } j \rightarrow \infty$$

$$\left| \lim_{j \rightarrow \infty} r_{B \times v} (A[1, j]) - \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u} (A[1, i]) \cdot \frac{1}{p} \right| < \varepsilon \text{ für alle } v \in \mathcal{U}(A)$$

Aus $\left| \lim_{j \rightarrow \infty} r_{B \times v} (A[1, j]) - \lim_{j \rightarrow \infty} r_B (A[1, j]) \right| < 2\varepsilon$ für alle $v \in \mathcal{U}(A)$ und

$\varepsilon > 0$ beliebig folgt deshalb die Gleichheit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_{B \times v} (A[1, j]) = \alpha \text{ für alle } v \in \mathcal{U}(A).$$

Wir bestimmen nun eine genügend große natürliche Zahl q , so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $l \geq q$ $|r_B(\omega(k, l)) - \alpha| < 6\varepsilon$ gilt.

Dazu wählen wir die Zahl i so groß, daß zusätzlich zu 1), 2), 3) die Bedingung

$$4) \quad |r_{B \times u} (A[1, i]) - \alpha| < \varepsilon \text{ für alle } u \in \mathcal{U}(A) \text{ erfüllt ist.}$$

Wir wählen $q \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{|A[1, i]|}{q} < \varepsilon$ gilt. Sei $l \geq q$

Wir nutzen jetzt aus, daß die Folge $\omega = A[1, i] \times \omega^{i+1}$ aus Blöcken $A[1, i] \times u$ mit $u \in \mathcal{U}(A)$ aufgebaut ist.

Deshalb gibt es für $\omega(k, l)$ folgende Darstellung:

$$\omega(k, l) = w' \cdot (A[1, i] \times D) \cdot w'' \text{ mit } w', w'' \in G^*, D \in \mathcal{U}(A)^*$$

$$\text{und } |w'| < |A[1, i]|, |w''| < |A[1, i]|$$

Wir haben dann die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |r_B(\omega(k, l)) - r_B(A[1, i] \times D)| &\leq \left| \frac{1}{l} \cdot (l \cdot r_B(\omega(k, l)) - |A[1, i] \times D| \cdot r_B(A[1, i] \times D)) \right| \\ &+ \left| \frac{1}{l} \cdot (|A[1, i] \times D| - l) \cdot r_B(A[1, i] \times D) \right| \\ &\leq 2 \frac{|w'| + |w''|}{1} \leq \frac{4 |A[1, i]|}{1} < 4\varepsilon \end{aligned}$$

Es folgt

$$\alpha) \quad |r_B(\omega(k, l)) - r_B(A[1, i] \times D)| < 4\varepsilon$$

Wir wenden Lemma 3 an und erhalten

$$\beta) \quad \left| r_B(A[1, i] \times D) - \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u^{-1}}(A[1, i]) \cdot r_u(D) \right| < \varepsilon$$

Aus Bedingung 4) ergibt sich

$$\gamma) \quad \left| \sum_{u \in \mathcal{U}(A)} r_{B \times u^{-1}}(A[1, i]) \cdot r_u(D) - \alpha \right| < \varepsilon$$

Aus $\alpha), \beta), \gamma)$ erhält man $|r_B(\omega(k, l)) - \alpha| < 6\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq q$.

Somit ist die gleichmäßige Konvergenz von $\lim_{l \rightarrow \infty} r_B(\omega(k, l)) = \alpha$ gesichert.

Theorem 4

Gegeben sei die einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$,

$$(\mathcal{U}(A) : e) = p.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

a) $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ ist strikt transitiv.

b) $\lim_{j \rightarrow \infty} r_u(A_i \times A_{i+1} \times \dots \times A_j)$ existiert für alle $u \in \mathcal{U}(A)$ und für fast alle $i \in \mathbb{N}$ und hat denselben von i und u unabhängigen Wert const.

$$c) \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=i}^j (r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in \mathcal{U}(A)} = \begin{pmatrix} 1/p & \dots & 1/p \\ \vdots & & \vdots \\ 1/p & \dots & 1/p \end{pmatrix} \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}.$$

d) $\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=i}^j \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_k) \chi(a) = 0$ für alle nicht-trivialen Charaktere $\chi : \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ und fast alle $i \in \mathbb{N}$.

e) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a)|) = \infty$ für jeden nicht-trivialen Charakter $\chi : \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$

Beweis:

Die Äquivalenz von a) und b) folgt aus Satz 9.

Berücksichtigen wir, daß fast alle Blöcke A_i Elemente aus $\mathcal{U}(A)^*$ sind, so ergibt sich die Äquivalenz von b), c) und d) aus Corollar 2.

Wir wenden nun einen Satz über unendliche Produkte aus K. Knopp [13] an und erhalten für jeden nicht-trivialen Charakter $\chi : \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$

folgende äquivalente Aussagen:

$$\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=i}^j \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_k) \chi(a) = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N} \right) \iff \left(\text{Entweder es gibt unendlich viele } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) = 0 \text{ oder es gibt } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \neq 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, i \geq k \right)$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \neq 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, i \geq k$$

$$\text{und } \prod_{i=k}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) = 0 \iff \left(\text{Entweder es gibt unendlich viele } i \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) = 0 \text{ oder es gibt } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \neq 0 \right)$$

$$\text{für alle } i \in \mathbb{N}, i \geq k$$

$$\text{und } \sum_{i=k}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \right|) = \infty$$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \right|) = \infty \right)$$

Es folgt somit die Äquivalenz von d) und e)

Satz 10

Gegeben sei die einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$

und $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ sei strikt transitiv und nicht-periodisch.

Dann divergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\text{DET}(r_{a \circ b^{-1}}(A_i))_{a, b \in G}|)$.

Beweis:

Aus ω nicht-periodisch folgt, daß $\mathcal{U}(A)$ eine nicht-triviale Untergruppe von G ist. Deshalb gilt $|G/\mathcal{U}(A)| < (G : e) = n$

Aus Satz 9 ergibt sich, daß $\omega^i = A_i \times A_{i+1} \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ strikt transitiv ist für $i = 1, 2, \dots$

Wir wenden Satz 7 d) an und erhalten für den Rang der n -reihigen quadratischen Matrix $\widehat{\omega^i}$ folgende Abschätzung $\text{Rang } \widehat{\omega^i} = |G/\mathcal{U}(A)|$

Es folgt $\text{Rang } \widehat{\omega^i} < n$ Deshalb verschwindet die Determinante von $\widehat{\omega^i}$.

Aus $0 = \text{DET}(\widehat{\omega^i}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=i}^j \text{DET}(\widehat{A_k})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt die Divergenz

der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\text{DET}(\widehat{A_i})|)$.

Wir beweisen jetzt, daß für $(G : e) = 2, 3$ die Bedingung vom letzten Satz auch hinreichend für die strikte Transitivität von ω ist.

Corollar 3

Es sei $(G : e) = 2$ oder 3

Gegeben sei die einfache Blockfolge $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$

und die zugehörige rekurrente Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ sei nicht-periodisch.

ω ist dann und nur dann strikt transitiv, wenn die Reihe

$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\text{DET}(r_{a \circ b^{-1}}(A_i))_{a, b \in G}|)$ divergiert.

Beweis:

Aus ω nicht-periodisch folgt, daß $\mathcal{U}(A)$ eine nicht-triviale Untergruppe von G ist. Da die Ordnung von G eine Primzahl ist, ergibt sich $\mathcal{U}(A) = G$.

Die strikte Transitivität von ω ist nach Theorem 4 d) äquivalent zu

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^j \left| \sum_{a \in G} r_a(A_k) \chi(a) \right| = 0 \text{ für alle nicht-trivialen Charaktere}$$

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad (*) \text{ und fast alle } i \in \mathbb{N}$$

$$(G : e) = 3$$

Die beiden nicht-trivialen Charaktere von G sind zueinander konjugiert-komplex $\chi, \bar{\chi} : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \text{DET} (r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in G} \right| \\ &= \left| \left(\sum_{a \in G} r_a(A_k) \chi(a) \right) \cdot \left(\sum_{a \in G} r_a(A_k) \bar{\chi}(a) \right) \right| = \left| \sum_{a \in G} r_a(A_k) \chi(a) \right|^2 \end{aligned}$$

Aus (*) folgt: ω ist dann und nur dann strikt transitiv, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^j \left| \sum_{a \in G} r_a(A_k) \chi(a) \right|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^j \left| \text{DET} (r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in G} \right| \text{ für fast}$$

alle $i \in \mathbb{N}$ verschwindet. Die letzte Aussage ist äquivalent zur Divergenz

$$\text{der Reihe } \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \left| \text{DET} (r_{a \cdot b^{-1}}(A_i))_{a, b \in G} \right|).$$

$$(G : e) = 2$$

Es gibt nur einen nicht-trivialen Charakter $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ und es gilt

$$\left| \text{DET} (r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in G} \right| = \left| \sum_{a \in G} r_a(A_k) \chi(a) \right|$$

Aus (*) folgt somit: ω ist dann und nur dann strikt transitiv, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^j \left| \text{DET} (r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in G} \right| \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N} \text{ verschwindet.}$$

Für $(G : e) = 2$ ergibt sich nun die Aussage von M. Keane [12].

Corollar 4

Gegeben sei die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}_2$.

Die rekurrente Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ sei nicht-periodisch.

ω ist dann und nur dann strikt transitiv, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Min} \{r_0(A_i), r_1(A_i)\}$ divergiert.

Beweis:

Sei $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ der nicht-triviale Charakter, somit $\chi(0) = 1, \chi(1) = -1$

Wir erhalten $|\text{DET}(r_{a \cdot b^{-1}}(A_k))_{a, b \in G}| = |r_0(A_k)\chi(0) + r_1(A_k)\chi(1)|$
 $= |r_0(A_k) - r_1(A_k)| = 1 - 2 \text{Min} \{r_0(A_k), r_1(A_k)\}$ für $k = 1, 2, \dots$

Nach Corollar 3 ergibt sich die Behauptung.

Wir zeigen nun, daß alle rekurrenten Folgen $\omega = D \times D \times \dots$ automatisch strikt transitiv sind.

Satz 11

Es sei $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ eine einfache Blockfolge

mit $A_i = D$ für $i = 1, 2, \dots$

Dann ist $\omega = D \times D \times \dots$ strikt transitiv.

Beweis:

Es sei $\tilde{D} : G \rightarrow [0, 1]$ die Abbildung mit $\tilde{D}(g) = r_g(D)$ für alle $g \in G$.

Es ist $E(\tilde{D}) = \{g \mid g \in G, \tilde{D}(g) \neq 0\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}(A)$.

Wir wenden Theorem 1 auf die Abbildung $\tilde{D} \mid \mathcal{U}(A) : \mathcal{U}(A) \rightarrow [0, 1]$

an mit $M(\tilde{D} \mid \mathcal{U}(A)) = (r_{a \cdot b^{-1}}(D))_{a, b \in \mathcal{U}(A)}$ und erhalten

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (r_{a \cdot b^{-1}}(D))_{a, b \in \mathcal{U}(A)}^j = \begin{pmatrix} 1/p \dots 1/p \\ \vdots \\ 1/p \dots 1/p \end{pmatrix} \quad \text{mit } (\mathcal{U}(A) : e) = p$$

Es ergibt sich nun aus Theorem 4 c) die Behauptung.

Wir verallgemeinern Satz 11 auf rekurrente Folgen $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots$

mit nur endlich vielen paarweise verschiedenen Blöcken $A_1, A_2, \dots$

Theorem 5

Es sei $A = (A_1, A_2, \dots) \in (G^*)^{\mathbb{N}}$ eine einfache Blockfolge mit nur endlich vielen paarweise verschiedenen Blöcken $A_1, A_2, \dots$

Dann ist die rekurrente Folge $\omega = A_1 \times A_2 \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ strikt transitiv.

Beweis:

Es sei $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subset \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{A_i \mid i \in \mathbb{N}, i \geq k\}$
 $= \{B_1, B_2, \dots, B_m\} \quad (*)$

Weiterhin sei $E(\tilde{B}_s) = \{g \mid g \in G, r_g(B_s) \neq 0\}$ für $s = 1, \dots, m$

Dann ist $E = E(\tilde{B}_1) \cup E(\tilde{B}_2) \cup \dots \cup E(\tilde{B}_m)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}(A)$.

Es sei $\chi: \mathcal{U}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ ein nicht-trivialer Charakter.

Es folgt $\chi|_E \neq 1$, da E ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}(A)$ ist.

Es gibt deshalb $a \in E$ mit $\chi(a) \neq 1$

o.B.d.A. $a \in E(\tilde{B}_1)$

Wir haben $e, a \in E(\tilde{B}_1)$ mit $\chi(a) \neq \chi(e) = 1$

Deshalb liegt der Punkt $\sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(B_1) \chi(a)$ als echte Konvexkombination

der Extrempunktmenge $\{\chi(a) \mid a \in \mathcal{U}(A)\} \subset S^1$ im Innern des Einheitskreises.

$$\left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(B_1) \chi(a) \right| < 1$$

Wegen $(*)$ gibt es eine Folge $(i_1, i_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $i_1 < i_2 < \dots$

mit $A_{i_j} = B_1$ für $j = 1, 2, \dots$

Wir erhalten aus $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_{i_j}) \chi(a) \right|) = \infty$ die Divergenz
 von $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_i) \chi(a) \right|)$

Nach Theorem 4 e) folgt, daß ω strikt transitiv ist.

Wir haben schon gezeigt, daß alle rekurrenten Folgen der Gestalt $\omega = D \times D \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ strikt transitiv sind. Wir zeigen nun, daß sie sich im allgemeinen stark aperiodisch verhalten. Das folgende Theorem ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hedlund-Morse [5].

Theorem 6

Es sei G eine endliche abelsche Gruppe und D ein mit dem Einselement beginnender Block mit $|D| = m > 1$

Es sei $\omega = D \times D \times \dots \in G^{\mathbb{N}}$ die mit Hilfe von D konstruierte rekurrente Folge.

Kommt es zu einem Ansatz einer mehr als m -fachen Wiederholung eines Blockes aus G^* in ω , so hat der Block D die Gestalt

$D = e h \dots h^{m-1}$ für ein $h \in G$ mit $h^{m-1} = e$

Beweis:

Der Block D habe die Darstellung

$D = d_0 d_1 \dots d_{m-1}$ mit $d_0, d_1, \dots, d_{m-1} \in G$ $d_0 = e$

Die Folge ω ist rekursiv aufgebaut:

Aus $\omega \times D = \omega$ erkennt man folgende Konstruktion:

Es sei $\omega = \omega_0 \omega_1 \dots$ mit $\omega_0, \omega_1, \dots \in G$

Dann ist $\omega_{im} \dots \omega_{(i+1)m-1} = D \times \omega_i$ für $i = 1, 2, \dots$

Es sei nun der Block $L = l_0 \dots l_{r-1} \in G^*$ gegeben und $L^m l_0$ komme an der Stelle s in ω vor.

$L^m l_0 = \omega_s \omega_{s+1} \dots \omega_{s+rm}$

Aus $s \equiv s + r m \pmod{m}$ folgt

Es gibt eine natürliche Zahl i mit $0 \leq i \leq m-1$, $s-i \equiv 0 \pmod{m}$

und Elemente $a_0, a_1, \dots, a_r \in G$, so daß wir folgende Darstellung haben:

$\omega_{s-i} \dots \omega_{s-i+(r+1)m-1} = D \times a_0 \cdot D \times a_1 \dots D \times a_r$

Es ergibt sich aus $d_i \circ d_0 = \omega_s = l_0 = \omega_{s+rm} = d_i \circ a_r$

die Gleichheit $a_0 = a_r$

Man erhält somit $D \times a_0 \cdot D \times a_1 \dots D \times a_{r-1} \cdot D \times a_0 = D_1 L^m D_2$ mit

Worten $D_1, D_2 \in G^*$

Hieraus folgt $D \times a_0 = D_1 D_2$

Aus $D \times a_0 \cdot D \times a_1 \dots D \times a_{r-1} \cdot D_1 = D_1 L^m$ folgt, daß das Wort D_1 das rechte Blockende von L^m bildet.

Es gibt deshalb Worte $L_1, L_2 \in G^*$ und eine Zahl $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ mit $D_1 = L_2 L_1^i$ und $L_1 \cdot L_2 = L$

Es ergibt sich nun

$$\prod_{i=0}^r D \times a_i = D_1 L^m D_2 = L_2 L_1^i L^m D_2 = L_2 L^m L_1^i D_2 = L_2 (L_1 L_2)^m L_1^i D_2 \\ = (L_2 L_1)^m L_2 L_1^i D_2 = (L_2 L_1)^m D_1 D_2 = (L_2 L_1)^m \cdot D \times a_0$$

Wir setzen nun $L' = L_2 L_1$ und haben dann die Darstellung

$$\omega_{s-i} \dots \omega_{s-i+(r+1)m-1} = (L')^m \cdot D \times a_0 \text{ mit } s-i \equiv 0 \pmod{m} \text{ und } |L'| = r$$

Falls die Länge von D die Länge von L' teilt, gibt es Elemente

$$a_0, a_1, \dots, a_r \in G \text{ mit } L' = \prod_{i=0}^{r'} D \times a_i$$

$$\text{Es gilt dann } \omega_{s-i} \dots \omega_{s-i+(r+1)m-1} = \left(\prod_{i=0}^{r'} D \times a_i \right)^m \cdot D \times a_0$$

Da die Folge ω rekursiv aufgebaut ist, ist für den Block

$$L'' = a_0 a_1 \dots a_r, \text{ der Block } (L'')^m \cdot a_0 \text{ in } \omega \text{ enthalten.}$$

Wegen dieses Reduktionsverfahrens nach der Länge von L können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich für L voraussetzen:

$$m \neq r, L^m l_0 = \omega_s \omega_{s+1} \dots \omega_{s+rm} \text{ und } s \equiv 0 \pmod{m}$$

Da die Folge ω aus Blöcken $D \times g, g \in G$ aufgebaut ist, gibt es

Elemente $a_0, a_1, \dots, a_r \in G$, Worte $L_1, L_2 \in G^*$ und eine Zahl $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\text{mit } \prod_{i=s}^{s+(r+1)m-1} \omega_i = \prod_{i=0}^r D \times a_i = L^{m+i} L_1 \text{ und } L_1 L_2 = L, a_0 = a_r$$

Da die Länge des Blockes D die Länge des Blockes L nicht teilt, gibt es Blöcke $E_1, E'_1 \in G^*$ und eine Zahl $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\text{mit } L \cdot E'_1 \times a_t = \prod_{i=0}^t D \times a_i \text{ und } E_1 \cdot E'_1 = D, 0 < |E_1| < m$$

Wir zeigen, daß sich dann Blöcke $D \times a_i$ in der Folge ω überlappen, und können so Satz 8 anwenden.

$E_1 \times a_t$	$D \times a_0$	$D \times a_1$	...	$D \times a_{r-t-1}$	$E'_1 \times a_{r-t}$
$D \times a_t$	$D \times a_{t+1}$	...	$D \times a_{r-1}$	$D \times a_r$	

Aus dem Bild kann man sofort ablesen:

$$\begin{aligned} L \cdot E'_1 \times a_t \cdot \prod_{i=t+1}^r D \times a_i &= \prod_{i=0}^r D \times a_i = L^{m+i} L_1 = L \cdot (L^{m-1+i} L_1) \\ &= L \cdot \prod_{i=0}^{r-t-1} D \times a_i \cdot E'_1 \times a_{r-t} \end{aligned}$$

Durch Abschneiden von L erkennen wir eine Verschiebung von Blöcken $D \times a_i$ um die Länge $|E'_1| < m$

$$E'_1 \times a_t \cdot \prod_{i=t+1}^r D \times a_i = \prod_{i=0}^{r-t-1} D \times a_i \cdot E'_1 \times a_{r-t}$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } D \times a_t \cdot D \times a_{t+1} &= E_1 \times a_t \cdot (E'_1 \times a_t \cdot E_1 \times a_{t+1}) \cdot E'_1 \times a_{t+1} \\ &= E_1 \times a_t \cdot D \times a_0 \cdot E'_1 \times a_{t+1} \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen von Satz 8 sind erfüllt.

Es gibt daher einen Block $v \in G^*$ und Elemente $g \in G$, $p \in \mathbb{N}$

$$\text{mit } D = \prod_{i=0}^{p-1} v \times g^i \text{ und } |v| \mid |E_1|$$

Aus $|E_1| = q \cdot |v|$, $q \in \mathbb{N}$ folgt für die Länge des Blockes E'_1

$$|E'_1| = (p-q) \cdot |v|$$

Aufgrund des "zyklischen Aufbaus" von D beweisen wir jetzt

$$a_i = g^p \circ a_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, r$$

Sei $t+1 \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} v \times a_i &= (v \times g^{p-q}) \times a_{i-t-1} = ((v \times g^{p-q-1}) \times a_{i-t-1}) \times g \\ &= ((v \times g^{p-1}) \times a_{i-1}) \times g = (v \times g^p) \times a_{i-1} \end{aligned}$$

$$\text{Es folgt } a_i = g^p \circ a_{i-1} \text{ für } t+1 \leq i \leq r$$

Falls t positiv ist, erhalten wir für $1 \leq i \leq t$ ganz analog

$$\begin{aligned} v \times a_i &= (v \times g^q) \times a_{t+i} = ((v \times g^{q-1}) \times a_{t+i}) \times g = ((v \times g^{p-1}) \times a_{i-1}) \times g \\ &= (v \times g^p) \times a_{i-1} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für $h = g^p$

$$a_i = h \circ a_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, r$$

Hieraus folgt $a_i = h^i \circ a_0$ für $i = 1, \dots, r$

Aus $a_r = a_0$ ergibt sich weiterhin $h^r = e$

Wir haben daher $\prod_{i=s}^{s+(r+1)m-1} \omega_i = \prod_{i=0}^r D \times a_i = \prod_{i=0}^r D \times (h^i \circ a_0)$

Aus dem rekursiven Aufbau der Folge ω folgt wiederum:

Der Block $H \times a_0$ mit $H = e h \dots h^r$ kommt in ω vor.

Wir zeigen nun $l_i = h \circ l_{i-1}$ für $i = 1, \dots, r-1$

Dazu untersuchen wir zuerst

Fall I $r < m$

a) Entweder kommt H in einem Block $D \times d$ vor:

Es gibt dann Elemente $d \in G$, $D_1, D_2 \in G^*$ mit $D = D_1 \cdot H \times d \cdot D_2$

b) Oder H überlappt die Grenze zweier Blöcke $D \times d_1, D \times d_2$:

Es gibt dann Elemente $d_1, d_2 \in G$, Blöcke $H_1, H_2 \in G^*$ und ein

Wort $D_1 \in G^*$ mit $D = H_2 \times d_2 \cdot D_1 \cdot H_1 \times d_1$ und $H_1 \cdot H_2 = H$

a)

Aus $L^m = \prod_{i=0}^{r-1} D \times a_i$ folgt $H \times (d \circ a_0) = l_j l_{j+1} \dots l_r l_0 \dots l_j$

Wir erhalten deshalb $l_i = h \circ l_{i-1}$ für $i = 1, \dots, r-1$

b)

Aus $D \times a_0 \cdot D \times a_1 = H_2 \times (d_2 \circ a_0) \cdot D_1 \times a_0 \cdot (H_1 \times (d_1 \circ a_0) H_2 \times (d_2 \circ a_1))$

$\cdot D_1 \times a_1 \cdot H_1 \times (d_1 \circ a_1)$

und $L^m = \prod_{i=0}^{r-1} D \times a_i$ ergibt sich

$H_1 \times (d_1 \circ a_0) \cdot H_2 \times (d_2 \circ a_1) = l_j l_{j+1} \dots l_{r-1} l_0 \dots l_j$

Hieraus folgt $l_i = h \circ l_{i-1}$ für $i = 1, \dots, r-1, i \neq j', j + |H_1| \equiv j' \pmod{r}$

$0 \leq j' \leq r-1$ fest

Vergleichen wir die Blöcke $D \times a_0, D \times a_1$

$D \times a_0 = l_0 \dots l_j, \dots l_{r-1} \cdot R_0$ mit $R_0 \in G^*$

$D \times a_1 = l_j, \dots l_0 \dots l_{j-1} \cdot R_1$ mit $R_1 \in G^*$

so erhält man ebenfalls $l_j = h \circ l_{j-1}$

Fall II $r > m$

Aus $|H| = r+1 > m+1$ erkennt man, daß H zwei aufeinanderfolgende Blöcke

$D \times c_1, D \times c_2$ $c_1, c_2 \in G$ aus ω überlappt.

Wir haben deshalb Elemente $H_1, H_2 \in G^*$ mit $H_1 \cdot H_2 = H$, $|H_1| = m+1$

und $(d_i \ d_{i+1} \ \dots \ d_{m-1}) \times c_1 \cdot (d_0 \ d_1 \ \dots \ d_i) \times c_2 = H_1 \quad 0 \leq i \leq m-1$

Es folgt $D = eh \dots h^{m-1}$

Wir hatten $L \cdot E_1' \times a_t = \prod_{i=0}^t D \times a_i$ mit $|E_1'| < m$

Aus $D = \prod_{i=0}^{p-1} v \times g^i$ mit $|v| \mid |E_1'|$ ergab sich $a_i = g^p a_{i-1}$ für $1 \leq i \leq r$

Entsprechend folgt aus $D = \prod_{i=0}^{m-1} h^i$

$a_i = h^m \circ a_{i-1}$ für $1 \leq i \leq r$

Hieraus erhalten wir $a_i = (h^m)^i \circ a_0$ für $1 \leq i \leq r$

und weiterhin folgt aus $L = \prod_{i=0}^{t-1} D \times ((h^m)^i \circ a_0) \cdot (eh \dots h^{|E_1'| - 1}) \times ((h^m)^t \circ a_0)$

$L = \prod_{i=0}^{r-1} (h^i \circ l_0)$

Insgesamt gilt für Fall I und Fall II: $l_i = h^i \circ l_0$ für $i = 1, \dots, r-1$

Da wir weiterhin die Gleichheit $h^r = e$ haben, folgt $L^m = \prod_{i=0}^{rm-1} (h^i \circ l_0)$

Es ergibt sich deshalb $L^m = \prod_{i=0}^{r-1} D \times ((h^m)^i \circ a_0)$

Für den Block L^m hatten wir außerdem die Darstellung $L^m = \prod_{i=0}^{r-1} D \times (h^i \circ a_0)$

Man erkennt daher $h^{m-1} = e$

Aus $\prod_{i=0}^{r-1} D \times a_i = \prod_{i=0}^{rm-1} (h^i \circ l_0)$ folgt außerdem $D = eh \dots h^{m-1}$

Aus Theorem 6 folgt

Corollar 5

Bei nicht-periodischen rekurrenten Folgen $\omega = D \times D \times \dots \in G^N$ ist jeder Ansatz zu einer mehr als $|D|$ -fachen Wiederholung von Blöcken aus G^* ausgeschlossen.

Beweis:

Nach Theorem 6 würde bei einem Ansatz einer mehr als $|D|$ -fachen Wiederholung eines Blockes aus G^* in ω die Periodizität von ω folgen.

§ 4 Strikt ergodische Teilmengen im Shiftraum $G^{\mathbb{Z}}$

Wir wollen mit Hilfe noch zu definierender rekurrenter Folgen $\omega \in G^{\mathbb{Z}}$ strikt ergodische Bahnhüllen im Shiftraum $G^{\mathbb{Z}}$ konstruieren. Wir geben zuerst eine Zusammenstellung der nötigen Begriffe und Bezeichnungen.

Definition 13

Das Paar (Ω, T) heißt dynamisches System, wenn Ω ein kompakter Hausdorffraum ist und $T: \Omega \longrightarrow \Omega$ ein Homeomorphismus.

Definition 14

Sei (Ω, T) ein dynamisches System. Dann bezeichnet man für jede nicht-leere, abgeschlossene T -invariante Teilmenge Ω_0 von Ω das dynamische System $(\Omega_0, T|_{\Omega_0})$ als dynamisches Untersystem von (Ω, T) .

Problem der Minimalität

Je nachdem, ob man bei einem dynamischen System untersucht, ob es topologisch oder ob es maßtheoretisch minimal ist, betreibt man topologische Dynamik oder Ergodentheorie.

Definition 15

Ein dynamisches System (Ω, T) heißt minimalinvariant (topologisch, minimal), wenn es außer (Ω, T) kein dynamisches Untersystem besitzt.

Definition 16

Für jeden Punkt $\omega \in \Omega$ bezeichnet man den Raum $B(\omega) = \{T^u(\omega) \mid u \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega$ als die Bahn von ω und die abgeschlossene Hülle $\overline{B(\omega)}$ als die Bahnhülle von ω .

Bemerkung

$\overline{B(\omega)}$ ist eine abgeschlossene T -invariante Teilmenge von Ω und daher ist $(\overline{B(\omega)}, T|_{\overline{B(\omega)}})$ ein dynamisches Untersystem des dynamischen Systems (Ω, T) für jeden Punkt $\omega \in \Omega$.

Nach Gottschalk [4] ist die Bahnhülle $\overline{B(\omega)}$ eines beliebigen Punktes $\omega \in \Omega$ dann und nur dann minimalinvariant, wenn für jede offene Umgebung U von ω eine positive Zahl p existiert, so daß für jede ganze

Zahl i mindestens einer der Punkte $T^{i+1}(\omega)$, $T^{i+2}(\omega)$, ..., $T^{i+p}(\omega)$ in $\mathcal{U}$ liegt, d.h. ω ein fastperiodischer Punkt ist.

Definition 17

Ein dynamisches System (Ω, T) heißt eindeutig ergodisch (maßtheoretisch minimal), wenn es genau ein T -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borelschen σ -Algebra von Ω gibt.

Definition 18

Ein dynamisches System (Ω, T) heißt strikt ergodisch, wenn (Ω, T) eindeutig ergodisch und minimalinvariant ist, d.h. sowohl in maßtheoretischer als auch in topologischer Hinsicht minimal ist.

Shift-dynamische Systeme

Wir betrachten jetzt Shift-dynamische Systeme über einer endlichen abelschen Gruppe G . Dazu definieren wir eine Topologie auf der Menge $G^{\mathbb{Z}}$.

Wir nehmen als Basis für die Topologie dieses Raumes die Menge der Zylinder $t[v] = \{\omega \mid \omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}}, \omega_{t+i} = v_i \text{ } i = 0, \dots, k-1\}$

wobei $v = v_0 \dots v_{k-1} \in G^k$, $t \in \mathbb{Z}$, $v_0, \dots, v_{k-1} \in G$

$G^{\mathbb{Z}}$ ist ein kompakter, total unzusammenhängender Hausdorff-Raum.

Wir definieren die Shiftung $T : G^{\mathbb{Z}} \longrightarrow G^{\mathbb{Z}}$ durch

$$T(\omega)_i = \omega_{i+1} \text{ für alle } \omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}}$$

Dann ist $(G^{\mathbb{Z}}, T)$ ein dynamisches System.

Definition 19

Die zu der Folge $A = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (G^*)^{\mathbb{Z}}$ mit $|A_i| \geq 1$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gehörige rekurrente Folge $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}}$ sei folgendermaßen konstruiert:

$$\omega(-t_{-1}, t_1) = (A_{-1} e A_1) \times \dots \times (A_{-i} e A_i) \text{ für } i = 1, 2, \dots$$

$$\omega(-t_{-1}, t_1) = A_{-1} e A_1$$

dabei ist $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ rekursiv definiert durch

$$t_{-1} = |A_{-1}| \quad t_1 = |A_1| \text{ und } t_{-(i+1)} = t_{-i} + (t_{-i} + t_i + 1) |A_{-(i+1)}|$$

$$t_{i+1} = t_i + (t_{-i} + t_i + 1) |A_{i+1}| \quad i \in \mathbb{N}$$

Im Unterschied zu rekurrenten Folgen in $G^{\mathbb{N}}$ wird hier nach beiden Seiten fortgesetzt.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\omega^k = (\omega_i^k)_{i \in \mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}}$ die zu der Blockfolge $(A_i^k)_{i \in \mathbb{Z}} \in (G^*)^{\mathbb{Z}}$

gehörige rekurrente Folge mit $A_i^k = A_{k+i}$, $A_{-i}^k = A_{-k-i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

$$A_0^k = A_k$$

Dann ordnen wir ganz analog zu § 3 der Blockfolge $A \in (G^*)^{\mathbb{Z}}$ die Untergruppe $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \omega^k[\mathbb{Z}]$ zu.

Wir können dann die Aussagen über strikt transitive rekurrente Folgen in $G^{\mathbb{N}}$ auf strikt transitive rekurrente Folgen in $G^{\mathbb{Z}}$ übertragen.

Theorem 7

Es sei $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}}$ die zu der Blockfolge $A = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (G^*)^{\mathbb{Z}}$ zugehörige rekurrente Folge und $B(\omega) = \{T^i(\omega) \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset G^{\mathbb{Z}}$ die Bahn von ω .

Die Bahnülle $\overline{B(\omega)}$ ist dann und nur dann strikt ergodisch, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_{-i} \in A_i) \chi(a) \right|)$ für jeden nicht-trivialen Charakter $\chi: \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ divergiert.

Beweis:

Nach Oxtoby [10] und Kakutani [11] ist die Bahnülle $\overline{B(\omega)}$ dann und nur dann strikt ergodisch, wenn ω strikt transitiv und fastperiodisch ist. Analog zu M. Keane [12] ist die rekurrente Folge ω fastperiodisch. Die Bahnülle $\overline{B(\omega)}$ ist somit dann und nur dann strikt ergodisch, wenn ω strikt transitiv ist. Diese Aussage ist nach Theorem 4 äquivalent mit der Divergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \left| \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} r_a(A_{-i} \in A_i) \chi(a) \right|)$ für alle nicht-trivialen Charaktere $\chi: \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Bemerkung

Das eindeutige T-invariante Maß μ_{ω} auf der Bahnülle $\overline{B(\omega)}$ ist automatisch ergodisch.

Für jeden Zylinder ${}_t[v]$ mit $t \in \mathbb{Z}$, $v \in G^*$ haben wir

$$\mu({}_t[v] \times a) = r_v(\omega) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{U}(A)$$

Für jede stetige Funktion $f : \overline{B(\omega)} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt weiterhin

$$\int f d\mu_\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} f(T^i(\omega))$$

Definition 20

Es sei $L^2(\mu_\omega)$ der Hilbertraum der komplexwertigen quadratisch-integrierbaren Funktionen auf der Bahnülle $\overline{B(\omega)}$.

Seien weiterhin $a \in \mathcal{U}(A)$, $f \in L^2(\mu_\omega)$

Dann nennt man $f_a \in L^2(\mu_\omega)$ die Translation von f um a mit

$$f_a(z) = f(z \times a) \quad \text{für alle } z \in \overline{B(\omega)}.$$

Bemerkung

Jede Translation der Elemente von $L^2(\mu_\omega)$ um ein festes $a \in \mathcal{U}(A)$ bewirkt eine Isometrie auf $L^2(\mu_\omega)$.

Wir definieren nun folgende abgeschlossene, lineare Unterräume von $L^2(\mu_\omega)$:

Definition 21

$$D_\omega = \{ f \mid f \in L^2(\mu_\omega), f = f_a \quad \forall a \in \mathcal{U}(A) \}$$

$$E_\omega = \mathcal{L}_{\mathbb{C}} \{ f \mid f \in L^2(\mu_\omega), \exists a \in \mathcal{U}(A) \text{ mit } \sum_{i=0}^{\text{Ordnung}(a)-1} f_{a^i} = 0 \}$$

Satz 12

Unter den Voraussetzungen von Theorem 7 besitzt der Hilbertraum $L^2(\mu_\omega)$ folgende direkte Zerlegung :

$$L^2(\mu_\omega) = D_\omega \oplus E_\omega$$

Beweis:

Für jedes $f \in L^2(\mu_\omega)$ haben wir die Darstellung:

$$f = \frac{1}{(\mathcal{U}(A):e)} \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} f_a + \sum_{\substack{a \in \mathcal{U}(A) \\ a \neq e}} \frac{1}{(\mathcal{U}(A):e)} (f - f_a)$$

mit $\frac{1}{(\mathcal{U}(A):e)} \sum_{a \in \mathcal{U}(A)} f_a \in D_\omega$ und $\sum_{\substack{a \in \mathcal{U}(A) \\ a \neq e}} \frac{1}{(\mathcal{U}(A):e)} (f - f_a) \in E_\omega$

Die Zugehörigkeit des ersten Terms zu D_ω folgt, weil $\mathcal{U}(A)$ Gruppe ist.

Aus $\sum_{i=0}^{\text{Ordnung}(a)-1} (f - f_a)_a i = 0$ für alle $a \in \mathcal{U}(A)$ ergibt sich die

Zugehörigkeit des zweiten Terms zu E_ω .

Sei $f \in D_\omega$ und $g \in E_\omega$ mit $\sum_{i=0}^{\text{Ordnung}(a)-1} g_a i = 0$ für ein $a \in \mathcal{U}(A)$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } 0 &= \int \bar{f} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\text{Ordnung}(a)-1} g_a i \right) d\mu_\omega = \sum_{i=0}^{\text{Ordnung}(a)-1} \int (\bar{f} \cdot g_a i) d\mu_\omega \\ &= \text{Ordnung}(a) \cdot \int \bar{f} \cdot g d\mu_\omega \end{aligned}$$

Es ergibt sich $f \perp g$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C.M. Ablow and J.L. Brenner : Roots and canonical forms for circulant matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 107, 360-376 (1963)
- [2] E. Coven and M. Keane : The structure of substitution minimal sets, Trans. Amer. Math. Soc. 162, 89-102 (1971)
- [3] E. Eberlein : Toeplitz-Folgen und Gruppentranslationen, Arch. Math. Vol XXII, 291-301 (1971)
- [4] W.H. Gottschalk : Almost periodic points with respect to transformation semigroups, Ann. of Math. , 11 Ser. 47, 762-766 (1946)
- [5] G. Hedlund and M. Morse : Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups, Duke Math. J. 11, 1-7 (1944)
- [6] K. Jacobs : Maschinenerzeugte 0-1-Folgen, Heidelberger Taschenbücher Band 49, Springer Verlag 1969
- [7] K. Jacobs : Turingmaschinen und zufällige 0-1-Folgen, Heidelberger Taschenbücher Band 67, Springer Verlag 1970
- [8] K. Jacobs : Einige Grundbegriffe der topologischen Dynamik, Heidelberger Taschenbücher Band 98, Springer Verlag 1972
- [9] K. Jacobs and M. Keane : 0-1-Sequences of Toeplitz Type, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13, 123-131 (1969)
- [10] S. Kakutani : Ergodic theory of shift-transformations, Proc. Fifth. Berkely Sympos. Math. Statist. Probability II, 405-414 (1967)
- [11] M. Keane : Morse-Folgen mit vorgegebenem rationalem Spektrum, 43 S., Diss. Univ. Erlangen-Nürnberg 1967
- [12] M. Keane : Generalized Morse Sequences, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10, 335-353 (1968)
- [13] M. Knopp : Infinite sequences and series, Dover, New York 1956
- [14] S. Lang : Algebra, Addison-Wesley, Massachusetts 1974

- [15] M. Morse : Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 22, 84-100 (1921)
- [16] J.C. Oxtoby : Ergodic sets, Bull. Amer. Math. Soc. 58, 116-136 (1952)
- [17] M. Pearl : Matrix theory and finite mathematics, Mc. Graw-Hill, New York 1973
- [18] A. Thue : Über unendliche Zeichenreihen, Christiania Vidensk. Selsk. Skr. 1906 Nr. 7, 22 S. Lex. 3^o

Lebenslauf

Am 14. Februar 1942 wurde ich in Berlin als Sohn des Maschinenbauingenieurs Richard Poch und seiner Ehefrau Gerda Poch geb. Lehmann geboren. Ich wuchs in Berlin auf. An einem Gymnasium in Berlin-Tegel bestand ich im März 1962 die Reifeprüfung.

Im Juni 1962 immatrikulierte ich mich an der FU Berlin mit dem Hauptfach Mathematik und dem Nebenfach Physik. Im Februar 1965 bestand ich dort die Vordiplomprüfung und studierte anschließend ein Semester in Marburg. Danach nahm ich wieder mein Studium in Berlin auf. Im Juli 1969 legte ich an der FU Berlin die Diplomprüfung mit dem Hauptfach Mathematik und dem Nebenfach Physik ab.

Vom August 1969 bis Dezember 1973 arbeitete ich im Bereich Datenverarbeitung und Elektronik des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin. Im Juli 1972 heiratete ich die Japanerin Junko Hasuka. Seit dem 15. Februar 1974 arbeite ich in der Zentraleinrichtung für Datenverarbeitung, Abt. 2 der Freien Universität Berlin.

Berlin, September 1976

